

# Модифікації двоетапної транспортної задачі

Віктор Стовба

Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

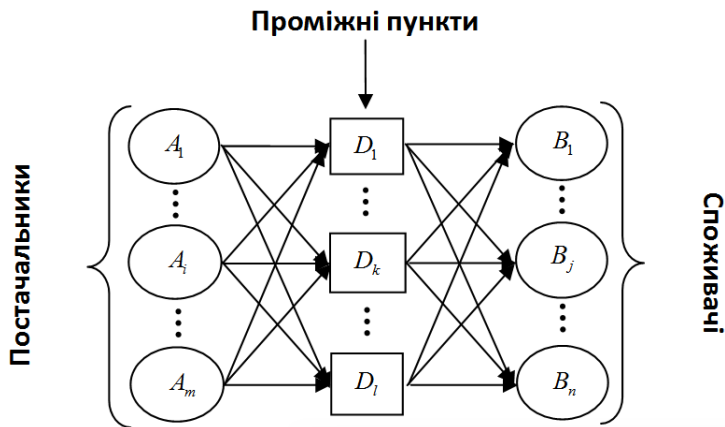
Науковий семінар «Теорія оптимальних рішень»

28 квітня 2026 року

- 1 Класична двоетапна транспортна задача (ДТЗ)
- 2 Модифікації двоетапних транспортних задач
- 3 Застосування модифікацій ДТЗ
- 4 Встановлення єдиності розв'язку лінійної ДТЗ

- 1 Класична двоетапна транспортна задача (ДТЗ)
- 2 Модифікації двоетапних транспортних задач
- 3 Застосування модифікацій ДТЗ
- 4 Встановлення єдиності розв'язку лінійної ДТЗ

# Схема задачі



# Постановка задачі

## Наявно:

- $m$  постачальників  $A_1, \dots, A_m$  з продукцією  $a_1, \dots, a_m$
- $n$  споживачів  $B_1, \dots, B_n$  з потребами  $b_1, \dots, b_n$
- $l$  проміжних пунктів  $D_1, \dots, D_l$ , через які здійснюється транспортування продукції до споживачів

Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції

$x = \{x_{ik}\}_{i=1, m}^{k=1, l}$  та  $y = \{y_{kj}\}_{k=1, l}^{j=1, n}$ , де

- $c_{ik}$  – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника  $A_i$  до проміжного пункту  $D_k$
- $c_{kj}$  – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту  $D_k$  до споживача  $B_j$

# Формулювання задачі

$$f^* = \min_{x, y \in \mathbb{R}_+^n} \left\{ f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (1)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^l x_{ik} = a_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^l y_{kj} = b_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} - \sum_{j=1}^n y_{kj} = 0, \quad k = 1 \dots l. \quad (4)$$

# Властивості задачі (1) – (4)

- Має  $(m + n) \times l$  змінних та  $m + n + l$  обмежень
- Належить до транспортних задач закритого типу (збалансованих)
- Містить детерміновані дані (запаси, потреби, вартості)
- Продукція однорідна та перевозиться через проміжні пункти

## Теорема 1 [1,2]

Система обмежень (2) – (4) є сумісною тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (5)$$

Умова (5) дозволяє встановлювати розв'язність задачі (1) – (4). Зокрема, в AMPL для цього використовується оператор `check`.

[1] Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. *Дослідження операцій: Навч. посіб.* Київ: Центр учбової літератури, 2007. 256 с.

[2] Наконечний С.І., Савіна С.С. *Математичне програмування: Навч. посіб.* Київ: КНЕУ, 2003. 452 с.

## ● Логістика і транспортні мережі

- Оптимізація маршрутів «постачальник → склад → клієнт»
- Планування роботи розподільчих центрів

## ● Постачання та виробництво

- Доставка сировини через проміжні склади
- Організація багаторівневих ланцюгів постачання

## ● Енергетика та ресурси

- Розподіл палива через нафтобази
- Передача електроенергії через підстанції
- Газові мережі з проміжними вузлами

## ● Гуманітарна та військова логістика

- Розподіл допомоги через склади
- Планування постачання в кризових умовах
- Мінімізація часу доставки в надзвичайних ситуаціях

- 1 Класична двоетапна транспортна задача (ДТЗ)
- 2 Модифікації двоетапних транспортних задач**
- 3 Застосування модифікацій ДТЗ
- 4 Встановлення єдиності розв'язку лінійної ДТЗ

## Модифікація 1: верхні границі на пропускні здатності п.п.

$$f_1^* = \min_{x, y \in \mathbb{R}_+^n} \left\{ f_1(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (1.1)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^l x_{ik} = a_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (1.2)$$

$$\sum_{k=1}^l y_{kj} = b_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} - \sum_{j=1}^n y_{kj} = 0, \quad k = 1 \dots l. \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} \leq d_k^{up}, \quad k = 1 \dots l. \quad (1.5)$$

## Теорема 2 [3]

Система обмежень (1.2) – (1.5) сумісна тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j^{up} \leq \sum_{k=1}^l d_k^{up}.$$

**Примітка.** Для однакових даних  $f^* \leq f_1^*$ , причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли жодне з обмежень на верхні границі неактивне.

[3] Stetsyuk, P.I., Stovba, V.O., Tregubenko, S.S., Khomiak, O.M. Modifications of the Two-Stage Transportation Problem and Their Applications. Cybernetics and Systems Analysis 58. 2022. P. 898–913.

## Модифікація 2: модифікація 1 + вибір проміжних пунктів

$$f_2^* = \min_{x,y,z} \left\{ f_2(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (2.1)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^l x_{ik} = a_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^l y_{kj} = b_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} - \sum_{j=1}^n y_{kj} = 0, \quad k = 1 \dots l. \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} \leq d_k^{up} z_k, \quad k = 1 \dots l. \quad (2.5)$$

$$\sum_{k=1}^l z_k = d, \quad (2.6)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad y_{kj} \geq 0, \quad z_k = 0 \vee 1, \quad (2.7)$$

$i = 1 \dots m, \quad k = 1 \dots l, \quad j = 1 \dots n.$

## Теорема 3 [3]

Система обмежень (2.2) – (2.7) сумісна тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j^{up} \leq \sum_{k=1}^d d_k^{up},$$

де  $d_1^{up} \geq d_2^{up} \geq \dots \geq d_l^{up}$ .

**Примітка.** Якщо  $l = d$  та  $d_k^{up} \geq \sum_{i=1}^m a_i$  для всіх  $k = 1 \dots l$ , тоді задача (2.1) – (2.7) еквівалентна класичній ДТЗ, а умова сумісності змінюється на  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j^{up}$ .

[3] Стецюк П.І., Стовба В.О., Трегубенко С.С., Хом'як О.М. Модифікації двоетапної транспортної задачі та їх застосування. *Кібернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58. №6. С. 54–70.

## Модифікація 3: ДТЗ + границі на потреби споживачів

$$f_3^* = \min_{x,y,z} \left\{ f_3(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (3.1)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^l x_{ik} = a_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (3.2)$$

$$\sum_{k=1}^l y_{kj} = z_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} - \sum_{j=1}^n y_{kj} = 0, \quad k = 1 \dots l. \quad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^n z_j = \sum_{i=1}^m a_i, \quad (3.5)$$

$$b_j^{low} \leq z_j \leq b_j^{up}, \quad j = 1 \dots n, \quad (3.6)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad y_{kj} \geq 0, \quad (3.7)$$

$i = 1 \dots m, \quad k = 1 \dots l, \quad j = 1 \dots n.$

## Теорема 4 [4]

Система обмежень (3.2) – (3.7) сумісна тоді й лише тоді, коли виконується умова

$$\sum_{j=1}^n b_j^{low} \leq \sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{j=1}^n b_j^{up}.$$

[4] Stovba V., Khomiak O. Two-Stage Transportation Problem with Unknown Consumer Demands: Consistency Aspects. *Proceedings of 3rd International Conference on Problems of Logistics, Management and Operation in the East-West Transport Corridor (PLMO 2024)*, May 15-17, 2024, Baku, Azerbaijan.

## Модифікація 4: мод. 3 + границі на пропускні здатності п.п.

$$f_4^* = \min_{x,y,z} \left\{ f_4(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (4.1)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^l x_{ik} = a_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (4.2)$$

$$\sum_{k=1}^l y_{kj} = z_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} - \sum_{j=1}^n y_{kj} = 0, \quad k = 1 \dots l. \quad (4.4)$$

$$d_k^{low} \leq \sum_{i=1}^m x_{ik} \leq d_k^{up}, \quad k = 1 \dots l, \quad (4.5)$$

$$\sum_{j=1}^n z_j = \sum_{i=1}^m a_i, \quad (4.6)$$

$$b_j^{low} \leq z_j \leq b_j^{up}, \quad j = 1 \dots n, \quad (4.7)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad y_{kj} \geq 0, \quad (4.8)$$

$i = 1 \dots m, \quad k = 1 \dots l, \quad j = 1 \dots n.$

## Теорема 5 [5]

Система обмежень (4.2) – (4.8) сумісна тоді й лише тоді, коли виконуються умови

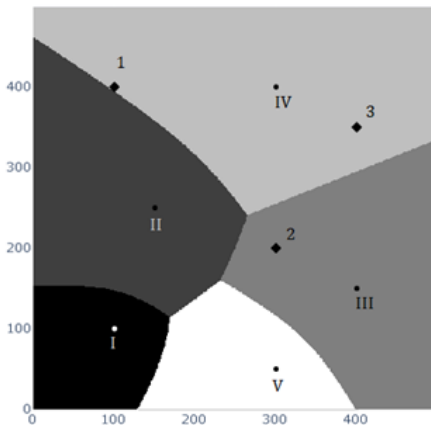
$$\sum_{j=1}^n b_j^{low} \leq \sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{j=1}^n b_j^{up}, \quad \sum_{k=1}^l d_k^{low} \leq \sum_{i=1}^m a_i \leq \sum_{k=1}^l d_k^{up}.$$

**Примітка.** Якщо  $d_k^{low} = 0$ ,  $d_k^{up} \geq \sum_{i=1}^m a_i$ ,  $k = 1 \dots l$ , а  $b_j^{low} = b_j^{up} = b_j$ , задача (4.1) – (4.8) зводиться до класичної ДТЗ.

[5] Stetsyuk P., Stovba V. Solvability Conditions of Two-Stage Transportation Problem with Two-Sided Constraints on Consumer Demands and Intermediate Points Capacities. *International Conference on Management and Control in Solving Engineering Problems (MaCoSEP 2025)*, March 13-15, 2025, Baku, Azerbaijan.

- 1 Класична двоетапна транспортна задача (ДТЗ)
- 2 Модифікації двоетапних транспортних задач
- 3 Застосування модифікацій ДТЗ
- 4 Встановлення єдиності розв'язку лінійної ДТЗ

# Задача оптимального розбиття-розподілу [6]



[6] Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Us S.A. Solving of a two-stage continuous-discrete problem of optimal partition-allocation with a given position of the centers of subsets. *Cybern. Syst. Analysis*. 2020. Vol. 56, Issue 1. P. 1–12.

# Постановка задачі

- Постачальник однорідного ресурсу, неперервно розподілений в області  $\Omega$  зі щільністю  $\rho(x) = 1$
- Punkти першого етапу (первинної переробки)  $\tau_i^I$ ,  $i = 1 \dots 5$
- Punkти другого етапу (споживання)  $\tau_j^{II}$ ,  $j = 1 \dots 3$

## Задано:

- Координати пунктів першого та другого етапів
- Вартості транспортування  $c_i^I(x, \tau_i^I)$  та  $c_j^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$

## Потрібно

- розбити множину  $\Omega$  на підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_5$ ,  $\bigcup_{i=1}^5 \Omega_i = \Omega$
- визначити об'єми перевезень  $v_{ij} \geq 0$  ( $i = 1 \dots 5$ ,  $j = 1 \dots 3$ )

так, щоб мінімізувати сумарну вартість транспортування

# Формулювання задачі

$$\sum_{i=1}^5 \int_{\Omega_i} c_i^I(x_i, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min \quad (6)$$

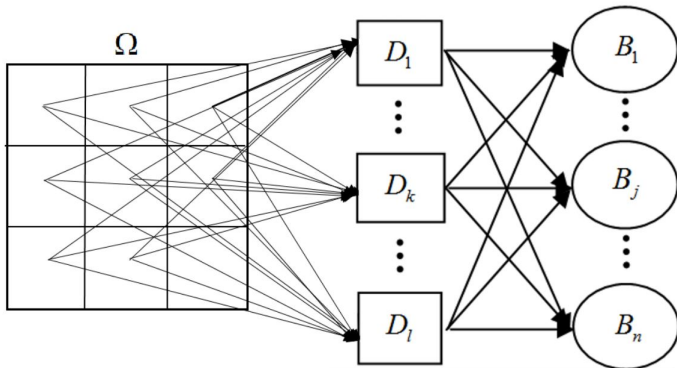
за обмежень

$$\sum_{j=1}^3 v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i = 1 \dots 5, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^5 v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = 1 \dots 3, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^5 \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^3 b_j^{II}. \quad (9)$$

# Схема задачі



Для сітки  $500 \times 500$  задача має  
1 250 018 змінних та 250 009 обмежень

# Обчислювальний експеримент

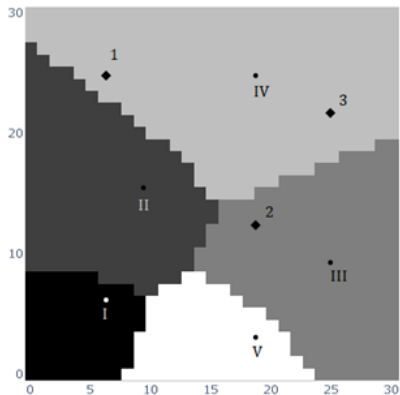
Використано: ДТЗ з верхніми границями на пропускні здатності п.п.

- Тест 1: сітка  $31 \times 31$ ,  $d_k^{up} = \sum_{i=1}^m a_i$
- Тест 2: сітка  $500 \times 500$ ,  $d_k^{up} = \sum_{i=1}^m a_i$
- Тест 3: сітка  $500 \times 500$ ,  $d_k^{up} = 0.2 \cdot \sum_{i=1}^m a_i$
- Тест 4: сітка  $500 \times 500$ ,  $d_k^{up} = 0.25 \cdot \sum_{i=1}^m a_i$

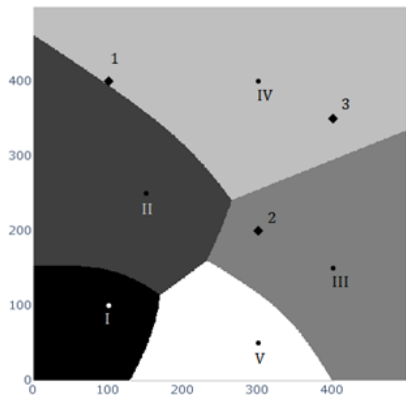
Для розв'язання задачі використано солвер **CPLEX** з NEOS-сервера та мова моделювання **AMPL**

[7] Stetsyuk, P.I., Stovba, V.O., Khomiak, O.M., Stetsyuk M.G. Two-Stage Transportation Problem with Two-Sided Constraints on Consumer Demands and Upper Bounds for Capacity of Intermediate Points. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2024. Vol. 60. P. 919–929.

# Оптимальні розбиття (тести 1 і 2)



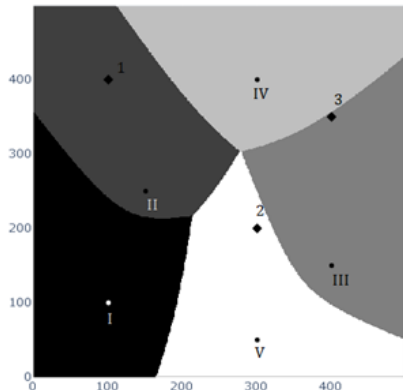
a)



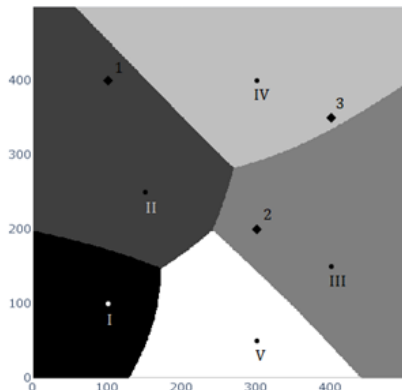
б)

а) сітка  $31 \times 31$ , обсяги споживання: 0.220604, 0.418314, 0.361082 (**0.03 с**)  
б) сітка  $500 \times 500$ , обсяги споживання: 0.228976, 0.428876, 0.342148 (**60 с**)

# Оптимальні розбиття (тести 3 і 4)



a)



б)

а) обсяги виробництва (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2) та споживання (0.2, 0.6, 0.2)  
б) виробництво (0.11, 0.25, 0.25, 0.25, 0.14) та споживання (0.25, 0.5, 0.25)

- **Задача про прикріплення/призначення**

Для заданих на площині точок визначити прикріплення до кластерів з заданими центрами так, щоб мінімізувати сумарну відстань від точок до центрів кластерів

- **Задача про  $p$ -медіану графа [3]**

Серед заданих на площині точок вибрати  $p$  медіан так, щоб мінімізувати сумарну відстань від них до решти точок

- **Задача про оптимальне розташування заданої кількості складів [3]**

Визначити раціональне розташування заданої кількості складів з урахуванням визначеного положення постачальників та споживачів матеріально-технічних засобів на території, де вони виконують свої завдання

- 1 Класична двоетапна транспортна задача (ДТЗ)
- 2 Модифікації двоетапних транспортних задач
- 3 Застосування модифікацій ДТЗ
- 4 Встановлення єдиності розв'язку лінійної ДТЗ

$$F^* = \min_{x,y} \left\{ F(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{kj} y_{kj} \right\} \quad (L1)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^l x_{ik} = a_i, \quad i = 1 \dots m, \quad (L2)$$

$$\sum_{k=1}^l y_{kj} = b_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (L3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} - \sum_{j=1}^n y_{kj} = 0, \quad k = 1 \dots l. \quad (L4)$$

Вважатимемо, що  $c_{ik}$ ,  $c_{kj}$ ,  $a_i$  та  $b_j$  – цілі

$$Q_w^* = \min_{X, Y} \left\{ Q(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l u_{ik} X_{ik}^2 + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n v_{kj} Y_{kj}^2 \right\} \quad (Q1)$$

за обмежень

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} X_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{kj} Y_{kj} = F^*, \quad (Q2)$$

$$\sum_{k=1}^l X_{ik} = a_i, \quad i = 1 \dots m, \quad \sum_{k=1}^l Y_{kj} = b_j, \quad j = 1 \dots n, \quad (Q3)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ik} - \sum_{j=1}^n Y_{kj} = 0, \quad k = 1 \dots l. \quad (Q4)$$

# Єдиність розв'язку задачі (Q1) – (Q4)

## Теорема 6

Якщо  $u_{ik} > 0$  та  $v_{kj} > 0$ , то задача (Q1) – (Q4) має єдиний розв'язок.

**З теорема 6 випливає:** якщо для двох **будь-яких** різних наборів додатних вагових коефіцієнтів розв'язки квадратичної задачі співпадають, то лінійна задача має єдиний розв'язок.

- Досліджено низку модифікацій двоетапної транспортної задачі, встановлено необхідні та достатні умови сумісності систем обмежень цих задач
- Розглянуті моделі досить гнучкі та застосовні для багатьох прикладних задач, зокрема до задачі оптимального розбиття-розподілу
- Отримані результати дозволяють встановлювати розв'язність задач та єдиність розв'язку

- 1 Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. *Дослідження операцій: Навч. посіб.* Київ: Центр учбової літератури, 2007. 256 с.
- 2 Наконечний С.І., Савіна С.С. *Математичне програмування: Навч. посіб.* Київ: КНЕУ, 2003. 452 с.
- 3 Stetsyuk, P.I., Stovba, V.O., Tregubenko, S.S., Khomiak, O.M. Modifications of the Two-Stage Transportation Problem and Their Applications. *Cybernetics and Systems Analysis* 58. 2022. P. 898–913.
- 4 Stovba V., Khomiak O. Two-Stage Transportation Problem with Unknown Consumer Demands: Consistency Aspects. *Proceedings of 3rd International Conference on Problems of Logistics, Management and Operation in the East-West Transport Corridor (PLMO 2024)*, May 15-17, 2024, Baku, Azerbaijan.

- 5 Stetsyuk P., Stovba V. Solvability Conditions of Two-Stage Transportation Problem with Two-Sided Constraints on Consumer Demands and Intermediate Points Capacities. International Conference on Management and Control in Solving Engineering Problems (MaCoSEP 2025), March 13-15, 2025, Baku, Azerbaijan.
- 6 Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Us S.A. Solving of a two-stage continuous-discrete problem of optimal partition-allocation with a given position of the centers of subsets. Cybern. Syst. Analysis. 2020. Vol. 56, Issue 1. P. 1–12.
- 7 Stetsyuk, P.I., Stovba, V.O., Khomiak, O.M., Stetsyuk M.G. Two-Stage Transportation Problem with Two-Sided Constraints on Consumer Demands and Upper Bounds for Capacity of Intermediate Points. Cybernetics and Systems Analysis. 2024. Vol. 60. P. 919–929.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!