

Лінійне та квадратичне програмування для відновлення розрідженого сигналу

Стороженко А.О.^{1,2} Стецюк П.І.^{1,2}

¹Київський академічний університет

²Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України

KyivAcademUs 2026

$$Ax = b$$

$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ — матриця вимірювань,

$x \in \mathbb{R}^n$ — невідомий розріджений вектор,

$b \in \mathbb{R}^m$ — вектор вимірювань.

$$x = ?$$

$$m < n$$

За певних умов на матрицю A та розрідженість вектора x , задачу відновлення розрідженого сигналу можна розв'язати за допомогою ℓ_1 мінімізації:

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1 \quad \text{за обмежень} \quad Ax = b. \quad (P_1)$$

Існують як детерміновані, так і ймовірнісні умови, що гарантують успішне відновлення розрідженого сигналу за допомогою ℓ_1 мінімізації.

Будемо розглядати випадкові матриці:

$$a_{ij} \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Задача (P_1) може бути перетворена на задачу лінійного програмування (ЛП) наступним чином:

$$\text{мінімізувати} \quad \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{LP1})$$

$$\text{за обмежень} \quad Ax = b, \quad (\text{LP2})$$

$$-y_i \leq x_i \leq y_i, \quad (\text{LP3})$$

$$y_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \quad (\text{LP4})$$

Задача (LP1)–(LP4) є еквівалентною задачі (P_1) та може бути розв'язана за допомогою будь-якого ЛП солвера.

Табл.: Порівняння ЛП солверів для $n = 5000$.

σ	m	test	CPLEX		HiGHS		Gurobi		Clarabel	
			t, s	$\ \hat{x} - x^*\ _2$	t, s	$\ \hat{x} - x^*\ _2$	t, s	$\ \hat{x} - x^*\ _2$	t, s	$\ \hat{x} - x^*\ _2$
0.01	790	0	31.6	1.73e-12	48	1.02e-08	22.4	1.22e-12	11.5	8.16e-08
		1	29.6	4.85e-12	44.4	5.61e-12	5.7	5.8e-12	11.6	9.65e-08
		2	31	3.94e-12	46.9	5.27e-10	5.76	6.9e-12	12.8	2.95e-07
		3	31.2	5.9e-12	44.1	3.98e-07	5.8	4.06e-12	12.5	1.13e-08
		4	29.3	4.22e-12	46.9	8.48e-08	5.81	6.53e-12	11.3	9.00e-08
0.05	1510	0	84.7	1.11e-11	2183	1.22e-10	81.1	6.69e-12	38.8	5.49e-08
		1	84.9	1.17e-11	169	2.73e-09	80.5	2.24e-12	39.8	5.76e-08
		2	84.8	1.17e-11	192	2.89e-10	29.5	1.16e-11	37.8	1.53e-07
		3	84	1.19e-11	170	8.73e-09	80.6	3.16e-12	38.6	1.33e-06
		4	84.7	1.04e-11	163	5.73e-08	80.5	3.49e-11	41.1	6.12e-08
0.1	2140	0	158	1.6e-11	589	1.58e-09	143	1.3e-11	89.8	8.53e-07
		1	159	1.53e-11	396	9.44e-11	151	8.23e-12	90.3	1.08e-07
		2	164	1.43e-11	383	6.54e-09	50.5	1.84e-11	89.8	3.64e-07
		3	160	1.62e-11	590	7.66e-08	139	8.75e-12	89.8	1.37e-07
		4	159	1.54e-11	384	3.19e-10	140	1.45e-11	89.6	4.75e-06

Для розуміння умов єдиності розв'язку задачі (P_1) використовуємо наступний геометричний підхід:

Визначення

Конус спадання $\mathcal{D}(f, \mathbf{x})$ опуклої функції $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ у точці $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ визначається як

$$\mathcal{D}(f, \mathbf{x}) = \bigcup_{\tau > 0} \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x} + \tau \mathbf{z}) \leq f(\mathbf{x}) \}.$$

Proposition

Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ є єдиним розв'язком задачі (P_1) за $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{D}(\|\cdot\|_1, \mathbf{x}) \cap \text{Ker } \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$.

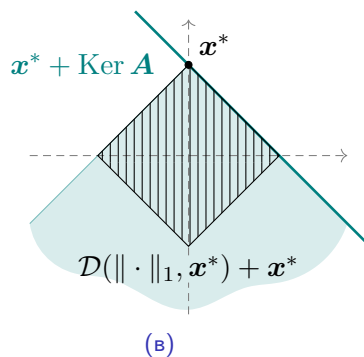
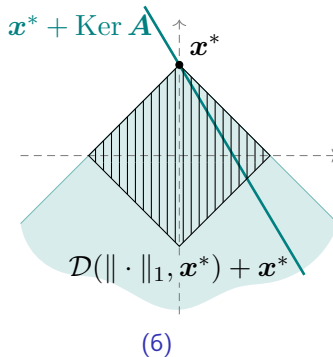
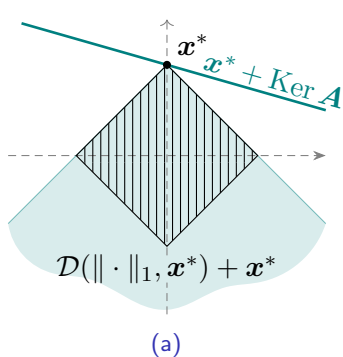


Рис.: Зафарбована ділянка показує конус спадання ℓ_1 -норми в точці x^* (для наочності центр конусу зміщено на x^*); заштрихована ділянка є множиною векторів, для яких норма є меншою порівняно з x^* . У випадку (а) маємо єдиний розв'язок задачі, що збігається з вектором x^* . У випадку (б) маємо розв'язок із меншою ℓ_1 -нормою, ніж x^* . У випадку (в) маємо декілька розв'язків із такою ж ℓ_1 -нормою, що і x^* .

Для перевірки єдиності попередньо знайденого розв'язку $\hat{x}$ (із відповідним значенням функції $\hat{f}$) задачі (LP1)–(LP4) розглянемо наступну задачу квадратичного програмування (КП):

$$\text{мінімізувати} \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (1)$$

$$\text{за обмежень} \quad Ax = b, \quad (2)$$

$$-y_i \leq x_i \leq y_i, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \hat{f}, \quad (4)$$

$$y_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

Якщо розв'язок задачі (1)–(5) відрізняється від $\hat{x}$, то розв'язок задачі (LP1)–(LP4) не є єдиним.

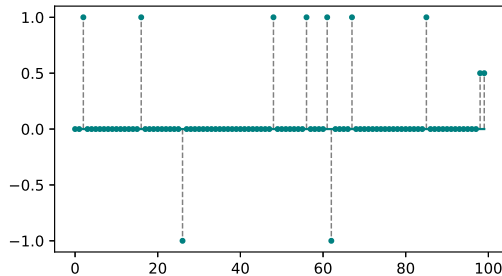
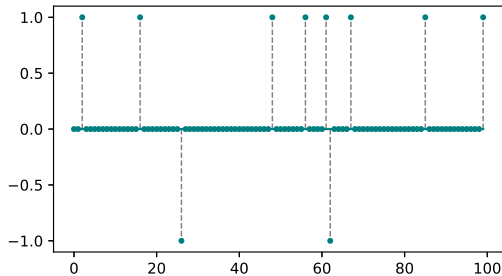


Рис.: Приклад тесту на єдиність розв'язку задачі (LP1)–(LP4) для матриці з випадковими цілочисельними елементами від -10 до 10 та двома лінійно залежними стовпцями. Зліва представлені значення розв'язку ЛП-задачі, який співпадає з вектором x^* . Справа — розв'язок задачі квадратичного програмування, який відрізняється від попереднього вектора, що свідчить про неунікальність розв'язку ЛП-задачі.

- Порівняння ЛП солверів для задачі відновлення розрідженого сигналу показало, що Clarabel є найшвидшим серед розглянутих солверів, але при цьому має більшу похибку порівняно з комерційними солверами CPLEX та Gurobi.
- Можливо перевірити єдиність розв'язку задачі (P_1) за допомогою розв'язання відповідної задачі квадратичного програмування: якщо розв'язок цієї задачі відрізняється від розв'язку ЛП-задачі, то розв'язок ЛП-задачі не є єдиним.
- Потенційним напрямком подальших досліджень є теоретичне обчислення ймовірності єдиності розв'язку задачі (P_1) для випадкових матриць з цілочисельними елементами, а також використання інших оптимізаційних методів для перевірки єдиності розв'язку.

Дякую за увагу!

-  Amelunxen, Dennis, Martin Lotz, Michael B. McCoy та Joel A. Tropp. “Living on the Edge: Phase Transitions in Convex Programs with Random Data”. В: *Information and Inference: A Journal of the IMA* 3.3 (вер. 2014), с. 224—294. ISSN: 2049-8764. DOI: [10.1093/imaiai/iaa005](https://doi.org/10.1093/imaiai/iaa005). (Дата зверн. 10.03.2026).
-  Candes, E.J. та T. Tao. “Decoding by linear programming”. В: *IEEE Transactions on Information Theory* 51.12 (2005), с. 4203—4215. DOI: [10.1109/TIT.2005.858979](https://doi.org/10.1109/TIT.2005.858979).
-  Chandrasekaran, Venkat, Benjamin Recht, Pablo A. Parrilo та Alan S. Willsky. “The Convex Geometry of Linear Inverse Problems”. В: *Foundations of Computational Mathematics* 12.6 (груд. 2012), с. 805—849. ISSN: 1615-3375, 1615-3383. DOI: [10.1007/s10208-012-9135-7](https://doi.org/10.1007/s10208-012-9135-7). arXiv: [1012.0621 \[math\]](https://arxiv.org/abs/1012.0621). (Дата зверн. 20.02.2026).
-  Donoho, D. “Compressed Sensing”. В: *Information Theory, IEEE Transactions on* 52 (трав. 2006), с. 1289—1306. DOI: [10.1109/TIT.2006.871582](https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582).

-  Foucart, Simon та Holger Rauhut. *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. New York, NY: Springer, 2013. ISBN: 978-0-8176-4947-0 978-0-8176-4948-7. DOI: [10.1007/978-0-8176-4948-7](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4948-7). (Дата зверн. 21.02.2026).
-  Goulart, Paul J. та Yuwen Chen. *Clarabel: An Interior-Point Solver for Conic Programs with Quadratic Objectives*. Трав. 2024. DOI: [10.48550/arXiv.2405.12762](https://doi.org/10.48550/arXiv.2405.12762). arXiv: 2405.12762 [math]. (Дата зверн. 20.02.2026).
-  Gurobi Optimization, LLC. *Gurobi Optimizer Reference Manual*. Accessed: 2026-03-06. URL: <https://www.gurobi.com>.
-  Huangfu, Q. та J. A. J. Hall. "Parallelizing the dual revised simplex method". В: *Mathematical Programming Computation* 10.1 (2018), с. 119—142. DOI: [10.1007/s12532-017-0130-5](https://doi.org/10.1007/s12532-017-0130-5).
-  IBM ILOG. *CPLEX Optimization Studio Documentation*. Accessed: 2026-03-06. URL: <https://www.ibm.com/docs/en/icos>.

ДОДАТОК 1: Гарантії відновлення для ℓ_1 мінімізації

Існують різноманітні умови, що гарантують еквівалентність задачі ℓ_1 мінімізації та початкової задачі відновлення розрідженого сигналу, але в цій роботі ми використовуємо наступний імовірнісний результат для гаусівських матриць вимірювань¹:

Теорема

Нехай $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ — фіксований вектор і $p \in (0, 1)$. Нехай $\mathbf{A} \in M_{m \times n}()$ — матриця з незалежними $\mathcal{N}(0, 1)$ -розподіленими елементами і $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}^*$. Тоді

$$m \leq \delta(\mathcal{D}(\|\cdot\|_1, \mathbf{x}^*)) - a_\eta \sqrt{n} \implies \mathbb{P}\{\mathbf{x}^* \text{ є єдиним розв'язком } (P_1)\} \leq \eta$$

$$m \geq \delta(\mathcal{D}(\|\cdot\|_1, \mathbf{x}^*)) + a_\eta \sqrt{n} \implies \mathbb{P}\{\mathbf{x}^* \text{ є єдиним розв'язком } (P_1)\} \geq 1 - \eta,$$

де $a_\eta = \sqrt{8 \log(4/\eta)}$.

¹Amelunxen та ін., “Living on the Edge” (вер. 2014).