

Адитивні розмітки графів: моделі та методи дослідження

Марина Семенюта

Центральноукраїнський національний технічний університет,
Кропивницький, Україна

Науковий семінар «Теорія оптимальних рішень»

12 травня 2026 року

Задачі, пов'язані з адитивними розмітками графів

	Постановка задачі	Зв'язок з адитивними розмітками	Джерела
1. Планування справедливих неповних турнірів, задачі ранжування та лінійного впорядкування	Потрібно побудувати розклад спортивного турніру або впорядкувати об'єкти множини так, щоб сумарні характеристики взаємодій були збалансованими або контрольовано відрізнялися.	Граф задає структуру взаємодій між об'єктами, а суми міток у локальних околах інтерпретуються як сумарні характеристики взаємодії. Це приводить до залучення магічних та антимагічних типів розміток.	1-4
2. Балансування навантаження у розподілених системах	У розподіленій системі необхідно організувати взаємодію вузів так, щоб уникнути перевантаження окремих елементів та забезпечити збалансоване локальне навантаження.	Задача може бути змодельована через адитивну умову на локальну суму навантажень у вузлу або його околі.	5-9
3. Криптографічне кодування та побудова ключових структур	Необхідно побудувати структуру шифрування, у якій взаємозв'язки між елементами ключа мають контрольовані числові властивості та забезпечують складність відновлення структури.	Магічні та антимагічні розмітки використовуються як комбінаторна основа побудови ключових структур, де локальні ваги визначають правила кодування.	10-11

Задачі, пов'язані з адитивними розмітками графів

	Постановка задачі	Зв'язок з адитивними розмітками	Джерела
4. Аналіз структури соціальних мереж	Потрібно виявити спільноти, локально щільні групи, структури взаємодії та поширення інформації у соціальній мережі.	Адитивні розмітки використовуються для побудови локальних числових характеристик графу, аналізу взаємодій у околах його вершин, а також для моделювання збалансованих або контрастних структур у мережі.	12-13
5. Ігри на графах	Потрібно побудувати гру на графі, у якій гравці по черзі присвоюють мітки вершинам або ребрам так, щоб виконувалися умови на локальні суми, магічні константи або відмінність індукованих ваг.	Ігровий процес полягає у побудові або руйнуванні адитивної конфігурації на графі.	14-16
6. Побудова комбінаторних конфігурацій та арифметичних розбиттів	Потрібно побудувати систему підмножин, блоків або комбінаторних конфігурацій, у яких локальні арифметичні характеристики задовольняють задані умови: є сталими, попарно різними, збалансованими або належать заданій алгебраїчній структурі.	У цих моделях локальні ваги вершин або ребер відповідають сумах елементів у побудованих комбінаторних структурах.	17-21

Адитивні розмітки графів: узагальнена модель та основні класи

Теорія адитивних розміток графів

- один із напрямів дискретної математики;
- базується на методах:
 - теорії графів;
 - комбінаторного аналізу;
 - алгебри;
 - дискретної оптимізації.

Адитивна розмітка – це відображення

$$f: X \rightarrow S,$$

$$X \in \{V(G), E(G), V(G) \cup E(G)\},$$

S – числова множина або скінчена абелева група.

Для кожного елемента визначається індукована вага

$$\sigma_i(f) = \sum_{x \in A_i} f(x),$$

де множини A_i задаються типом розмітки: околами вершин, інцидентними елементами, метрично визначеними підмножинами або їх комбінаціями.

Основні типи розміток та дослідники

Магічні розмітки

J. Sedláček
B. Stewart
W. Wallis
M. Bača
M. Miller
J. Ryan
P. Kovar

Дистанційні магичні розмітки

M. Miller
C. Rodger
R. Simanjuntak
D. Froncek
S. Arumugam
N. Kamatchi
A. O'Neal
P. Slater

Антимагічні розмітки

N. Hartsfield
G. Ringel
N. Alon
D. Hefetz
D. Froncek

Дистанційні антимагічні розмітки

D. Froncek
M. Miller
J. Ryan
K. Sugeng
T. Kovarova

Групові адитивні розмітки

S. Cichacz
D. Froncek
Š. Miklavič
K. Sugeng

Основні класи адитивних розміток графів

$G = (V, E)$ – звичайний граф

$D \subset \{0, 1, 2, \dots, \text{diam}(G)\}$ – підмножина відстаней

$N_D(v)$ – D -окіл вершини v – множина елементами якої є вершини відстань від яких до вершини v належить множині D

$f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$ – вершинну розмітку

Під D -вагою $w(v)$ (або $w_f(v)$) вершини $v \in V(G)$ розуміють суму міток вершин з її D -околу $N_D(v)$, тобто $w(v) = \sum_{u \in N_D(v)} f(u)$. Елементами множини $N_D(v)$ є вершини, відстань від яких до v належить D .

D -дистанційною магічною розміткою графу $G = (V, E)$ порядку p називається таке бієктивне відображення $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$, за якого $w(v) = \sum_{u \in N_D(v)} f(u) = k = \text{const}$ для всіх $v \in V(G)$. Стала k називається D -дистанційною (або дистанційною) магічною константою розмітки f , а граф G – D -дистанційним магічним.

При $D = \{1\}$ отримаємо класичну дистанційну магічну розмітку і $N_D(v) = N(v)$ – множина суміжності вершини v або її відкритий окіл;

при $D = \{0, 1\}$ – її узагальнення відоме як Σ' -розмітка і $N_D(v) = N[v]$ – замкнена множина суміжності вершини v або її замкнений окіл.

(a, d) -Дистанційною антимагічною розміткою графу $G = (V, E)$ порядку p називається така бієкція $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, p\}$, що множина всіх ваг вершин утворює арифметичну прогресію $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d$ з першим членом a і різницею d , де a, d – фіксовані невід’ємні цілі числа, $a \geq 1, d > 0$. Граф, який допускає таку розмітку, називають (a, d) -дистанційним антимагічним.

Основні класи адитивних розміток графів

Під Γ -дистанційною магічною розміткою графу $G = (V, E)$ порядку n розуміють бієктивне відображення f з множини вершин V на абелеву групу Γ порядку n , при якому вага $w(u) = \sum_{v \in N(u)} f(v)$ для кожної вершини $u \in V$ дорівнює одному й тому ж елементу $\mu \in \Gamma$, який називають магічною сталою. Якщо граф G допускає Γ -дистанційну магічну розмітку, то кажуть, що він є Γ -дистанційним магічним. Граф G називають груповим дистанційним магічним, якщо існує Γ -дистанційна магічна розмітка для кожної абелевої групи Γ порядку $|V(G)|$. Якщо ваги всіх вершин графу попарно різні при розмітці f , то її називають Γ -дистанційною антимагічною, а відповідний граф – Γ -дистанційним антимагічним.

Розглянемо граф G з множиною вершин V , $|V| = 2n$ і відображення $f : V \rightarrow Z_2$. Для кожної вершини $v \in V$ визначимо вагу $w(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u)$. Відображення f називають збалансованою суміжно-нульовою розміткою графу G , якщо $|f^{-1}(0)| = |f^{-1}(1)| = n$ і $w(v) = 0$ для кожної вершини $v \in V$.

Основні класи адитивних розміток графів

Граф $G = (V, E)$ розміру q , який не містить ізольованих вершин, називають антимагічним, якщо існує така реберна розмітка $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, що ваги всіх вершин G різні, де вага вершини $u \in V(G)$ – це число $w(u) = \sum_{(u,v) \in E(G)} f(u, v)$. Функцію f називають антимагічною розміткою або антимагічною розміткою графу G .

Основні задачі теорії адитивних розміток графів

1. *Задача існування.* Нехай задано граф $G = (V, E)$ та правило P , що визначає умови для деякого типу розмітки. Потрібно визначити чи існує таке відображення $f: X \rightarrow S$, що задовольняє всім умовам P , вона і буде задавати певну розмітку (вершинну: $X = V$, реберну: $X = E$, тотальну: $X = V \cup E$ тощо) , де S – множина міток.

2. *Задача побудови.* При заданій системі вимог для графу $G = (V, E)$ побудувати принаймні одну його розмітку, яка цій системі задовольняє.

3. *Задача переліку.* Для заданого графу $G = (V, E)$ необхідно визначити кількість попарно неізоморфних розміток заданого типу.

4. *Задача конструктивного переліку.* Задано граф $G = (V, E)$, що допускає розмітку певного типу. Ставиться за мету обчислити не лише кількість різних його розміток вказаного типу, а й явно побудувати повний набір попарно неізоморфних розміток.

5. *Задача визначення числових характеристик.* Для заданого графу $G = (V, E)$ та типу розмітки необхідно визначити числові параметри, пов'язані з умовами розмітки або її існуванням. До таких параметрів належать магічні сталі, мінімальний та максимальний розмах міток, мінімальний порядок групи, параметри збалансованості, а також інші числові характеристики, що визначають властивості відповідної розмітки.

Основні методи розв'язування задач теорії адитивних розміток графів

1. Конструктивний метод
2. Комбінаторний метод
3. Алгебраїчний метод
4. Аналітичний метод
5. Алгоритмічний метод

Незалежно від типу задачі узагальнимо етапи їх розв'язку:

- 1) формалізація умов розмітки через співвідношення на величини $\sigma_i(f)$, що визначаються структурою множини A_i та типом розмітки; на цьому етапі формується аналітична модель задачі, яка є спільною основою для подальшого застосування різних методів;
- 2) виведення структурних наслідків із системи умов;
- 3) спрощення системи умов, що приводить до зменшення розмірності задачі до еквівалентних задач на інших комбінаторних чи алгебраїчних об'єктах
- 4) аналіз сумісності отриманих співвідношень;
- 5) побудова розмітки, опис множини розв'язків або доведення неможливості їх існування.

Приклад 1. Дистанційна магічна розмітка циркулянтного графу $C(n; S)$

- **Граф:** $C(n; S)$, $S = \{1, 2, \dots, r\}$, вершини u_i , індекси за модулем n .
- **Суміжність:** $u_i \sim u_{i \pm j}$, $j \in \{1, \dots, r\}$ і $r < n/2$.
- **Регулярність:** граф є $2r$ -регулярним.
- **Задача:** побудова бієктивного відображення $f: X \rightarrow S$, $X = V(C(n; S))$, $S = \{1, 2, \dots, n\}$, щоб сума міток у відкритому околі кожної вершини була сталою.

Методи та етапи:

1. Аналітичний метод – формалізація системи рівнянь:

$$w(u_i) = \sigma_i(f) = \sum_{j=1}^r (f_{i+j} + f_{i-j}), k = r(n+1)$$

2. Комбінаторно-алгебраїчний метод – наслідки:

$$f_{i-r} + f_{i+1} = f_i + f_{i+r+1}, \quad f_i + f_{i+r+1} = c_i, \quad \text{період } a = \text{НСД}(n, r)$$

3. Алгебраїчний метод – спрощення умов у кільці лишків Z_n . Умова існування:

$$a(r+1) \equiv 0 \pmod{n}$$

Конструктивний метод – побудова розмітки через розбиття індексів на класи лишків.

4. Перевірка (пряма підстановка):

$$(u_i) = \frac{r}{a} \sum_{t=0}^{a-1} c_t = r(n+1) \rightarrow \text{усі вершини мають однакову вагу.}$$

Результат: побудоване відображення f є дистанційною магічною розміткою графа $C(n; S)$.

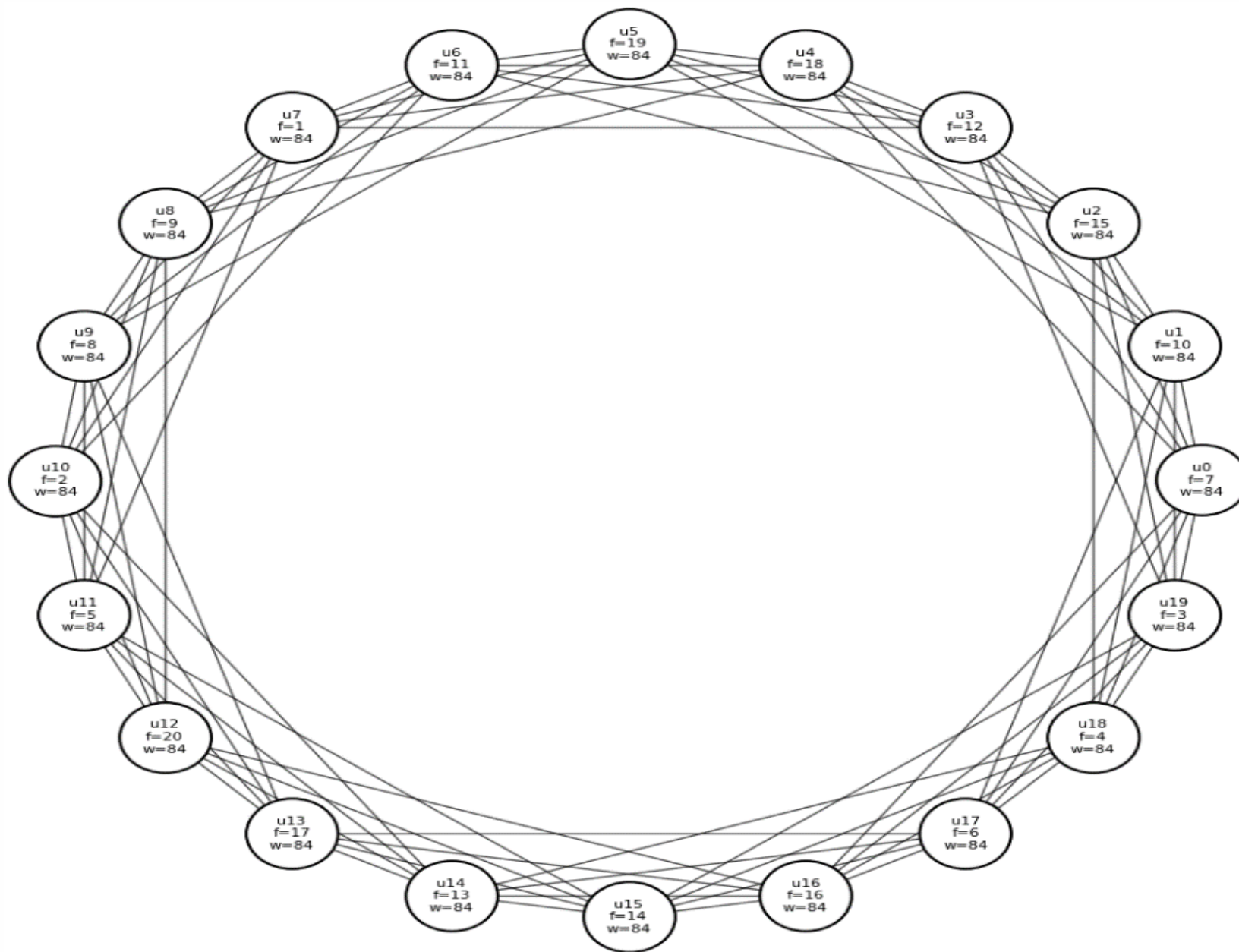


Рис. 1. Дистанційна магічна розмітка графу $C(20; \{1, 2, 3, 4\})$

Приклад 2. Дистанційна антимагічна розмітка графу $H(4,5) = K_5^4$

• **Граф:** $H(4,5) = K_5^4$.

• Вершини — усі слова довжини 4 над алфавітом Z_5 .

позначатимемо u_{x_1, x_2, x_3, x_4} , де x_1, x_2, x_3, x_4 — координата вершини, $x_i \in Z_5$

• Суміжність — різниця рівно в одній координаті.

• **Задача:** побудова бієктивного відображення $f: X \rightarrow S$, $X = V(H(4,5))$, $S = \{1, 2, \dots, 5^4\}$, щоб ваги вершин були попарно різними.

Методи та етапи:

1. Аналітичний метод — формалізація: вага вершини = сума міток 16 сусідів.

2. Комбінаторно-аналітичний метод — наслідок:

$w(u_{x_1, x_2, x_3, x_4}) = 4Q - 4f(u_{x_1, x_2, x_3, x_4}) \rightarrow$ попарна відмінність ваг із бієктивності.

3. Комбінаторно-алгебраїчний метод — використання лінійного ортогонального масиву над Z_5 .

Лінійні форми:

$$l_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, l_2 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4,$$

$$l_3 = x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4, l_4 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4$$

забезпечують сталість сум у множинах вершин.

4. Конструктивний метод — побудова відображення:

Четвірку (l_1, l_2, l_3, l_4) інтерпретуємо як запис числа у системі числення за основою 5.

$f(u_{x_1, x_2, x_3, x_4}) = 125l_1 + 25l_2 + 5l_3 + l_4 + 1 \rightarrow$ усі значення різні, охоплюють $\{1, \dots, 5^4\}$.

5. Перевірка: ваги вершин попарно різні $\rightarrow$ розмітка є дистанційною антимагічною.

Результат: побудоване відображення f забезпечує **дистанційну антимагічну розмітку** графа $H(4,5)$.

Комбінаторні конфігурації при побудові антимагічних розміток графів

Комбінаторна конфігурація – це відображення

$$\psi : X \rightarrow Y,$$

де X – скінчена множина елементів довільної природи;

Y – скінчена абстрактна результуюча множина Y певної структури; Λ – заданий набір обмежень.

Класи розміток графів: антимагічні та (a, d) -дистанційні антимагічні розмітки як окремі комбінаторні конфігурації:

$G = (V, E)$ – граф

$$1) X = E, |E| = q; Y = \{1, 2, \dots, q\};$$

Λ – включає правила: $w_\varphi = \sum_{v \in N(u)} \varphi(uv)$, $w_\varphi : V \rightarrow W_\varphi$ – бієкція, де W_φ – множина ваг вершин; допустима комбінаторна конфігурація $\psi : X \rightarrow Y$ з набором обмежень Λ задає переставлення чисел $1, 2, \dots, q$, що визначає антимагічну розмітку графу $G = (V, E)$.

$$2) X = V, |V| = p; Y = \{1, 2, \dots, p\};$$

Λ – включає правила, що задають (a, d) -дистанційну антимагічну розмітку G ; допустима комбінаторна конфігурація $\psi : X \rightarrow Y$ з набором обмежень Λ задає переставлення чисел $1, 2, \dots, p$, що визначає (a, d) -дистанційну антимагічну розмітку графу $G = (V, E)$;

Основні інструменти: відокремлювальні системи (CSS)

$M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ – сукупність підмножин множини $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

$\forall a, b \in [n], a \neq b \exists M_i \in M: a \in M_i, b \notin M_i$ або $a \notin M_i, b \in M_i \Rightarrow M$ – відокремлювальна система (або SS);

M_i – блоки, а їхні елементи – точки SS

$\forall a, b \in [n], a \neq b \exists M_i, M_j \in M: a \in M_i \setminus M_j$ і $b \in M_j \setminus M_i \Rightarrow M$ – повністю відокремлювальна система (або $(n)CSS$).

Якщо $M \in (n)CSS$, $s \leq |M_i| \leq k$, де s, k – натуральні числа, $\forall M_i \in M$, то $M - (n, s, k)CSS$

Якщо $|M_i| = k \forall M_i \in M$, то $M - (n, k)CSS$.

$\forall n, s, k$ – фіксовані натуральні числа:

Введемо числа:

$R(n) = \min\{|M|: M \in (n)CSS\};$

$R(n, s, k) = \min\{|M|: M \in (n, s, k)CSS\};$

$R(n, k) = \min\{|M|: M \in (n, k)CSS\}.$

Системи $(n)CSS$ або $(n, s, k)CSS$, або $(n, k)CSS$ – мінімальні при $|M| = R(n)$, $|M| = R(n, s, k)$ і $|M| = R(n, k)$ відповідно.

Основні інструменти: множина магічних прямокутників $MRC(k, n; t)$

Множина магічних прямокутників $MRC(k, n; t)$ – це множина з t матриць розміру $k \times n$, елементами яких є різні числа $r_{ij}^l \in P = \{1, 2, \dots, knt\}$, де $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq l \leq t$;
кожне з чисел множини P спостерігається тільки один раз в $MRC(k, n; t)$,
всі суми елементів рядків у кожній матриці дорівнюють сталій $\rho = n(knt + 1)/2$,
всі суми елементів стовпців – сталій $\sigma = k(knt + 1)/2$.

Повністю відокремлювальні систем і множини магічних прямокутників в термінах комбінаторних конфігурацій:

Комбінаторна конфігурація: $\psi : X \rightarrow Y$

1) $X = [n]$, Y – впорядкована підмножина з k різних чисел множини X ;

функція ψ – ін'єкція;

Процес побудови $\psi : X \rightarrow Y$ – вибір k чисел із заданих n за правилом Λ :

$\forall i, j \in [n], i \neq j \exists \psi(i) \text{ і } \psi(j): i \in (i) - \psi(j) \text{ і } j \in (j) - \psi(i)$ (під різницею значень функції розуміємо різницю відповідних множин) $\Rightarrow \Lambda \neq \emptyset$.

Знайдені за цією схемою класи комбінаторних конфігурації визначають $(n, k)CSS$.

2) X – множина матриць розміру $k \times n$, елементами яких є різні числа з $\{1, 2, \dots, knt\}$; $Y = MRC(k, n; t)$;

правило Λ : для всіх матриць з X суми всіх елементів кожного рядка дорівнювали сталій ρ , а суми всіх елементів кожного стовпця – сталій $\sigma \Rightarrow \Lambda \neq \emptyset$;

ψ – бієкція.

Знайдені за цією схемою класи комбінаторних конфігурації визначають $MRC(k, n; t)$.

CSS системи та антимагічна розмітка

Метод Робертса: побудова мінімальних (n, k) CSS через матриці Робертса C і C^*

Матриці Робертса C :

Розмір $R \times k$, $R = R(n, k) = \frac{2n}{k}$, $k \geq 2$, $n \geq C_{k+1}^2$ і $k|2n$;

Заповнення числами від 1 до n за правилом поступового зміщення нулів;

Кожен рядок $\rightarrow$ блок (n) CSS

C^* – модифікація C

$M = \{M_1, M_2, \dots, M_p\}$ – мінімальна (n, k) CSS є 2-елементними (кожен елемент повторюється двічі).

Побудови r -регулярного графу порядку p і розміру q :

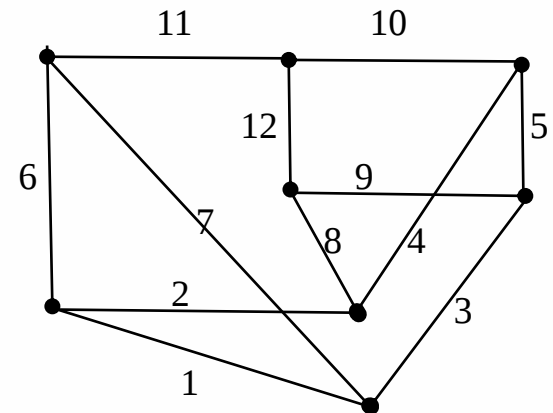
Блоки (q, r) CSS $\rightarrow$ вершини графу;

Спільні елементи блоків $\rightarrow$ ребра графу.

Результат: r -регулярний граф з антимагічною розміткою

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 10 \\ 5 & 9 & 11 \\ 6 & 10 & 12 \\ 7 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Приклад. Побудовано антимагічний 3-регулярний граф G порядку 8 і розміру 12 на основі $(12, 3)$ CSS.



CSS системи та антимагічна розмітка

Теорема 1. Кожній (q) CSS з $r + 1$ блоками розміру r і $r - 1$ блоками розміру $r + 1$ відповідає антимагічний бірегулярний граф порядку $2r$ і розміру q , якщо $r -$ непарне.

Доведення.

Умова: Якщо $q = \frac{(r+1)(2r-1)}{2}$, то r повинно бути непарним.

Побудова матриці $L = (l_{ij})$ розміру $2r \times (r + 1)$, $i = 1, 2, \dots, 2r$, $j = 1, 2, \dots, r + 1$

1) будуємо матрицю $L = (l_{ij})$ з $l_{ij} = 0$; 2) знаходимо $l_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{для } i = 1, \\ i - 1 & \text{для } 2 \leq i \leq r + 1, \end{cases} \quad l_{i1} = j - 1 \text{ для } 3 \leq j \leq r + 1$;

3) $t = r + 1 \Rightarrow$ 4) замінюємо два нульові елементи l_{ij} матриці L числом t , вибираємо їх за правилом:

$\min_j \min_i \{l_{ij} : l_{ij} = 0\}$, $\min_i \min_j \{l_{ij} : l_{ij} = 0\}$, при цьому вилучаємо з розгляду елементи $l_{i1} = 0$ для $1 \leq i \leq r + 1$;

5) значення t збільшуємо на одиницю і застосовуємо правило кроку 4.

6) повторюємо крок 5, доки не виконається рівність $t = q + 1$.

Матрицю L побудовано.

Рядки матриці $L \rightarrow$ блоки (q) CSS.

Блоки (q) CSS $\rightarrow$ вершини графу.

Спільні елементи блоків $\rightarrow$ ребра графу.

Отриманий граф є бірегулярним, має порядок $2r$, розмір q , його реберна розмітка є антимагічною

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & r \\ 0 & 1 & r+1 & r+2 & \dots & 2r-1 \\ 0 & 2 & 2r & 2r+1 & \dots & 3r-2 \\ 0 & 3 & 3r-1 & 3r & \dots & 4r-3 \\ 0 & 4 & 3r-1 & 4r-2 & \dots & 5r-5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r & 4r-5 & 6r-10 & \dots & 7r-13 \\ r+1 & 2r & 4r-4 & 6r-9 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2r-1 & 3r-2 & 5r-6 & 7r-11 & \dots & q \end{pmatrix}$$

CSS системи та антимагічна розмітка

Теорема 2. Кожному бірегулярному антимагічному графу $G = (V_1 \cup V_2, E)$ порядку $2r$ і розміру q , у якого $|V_1| = r + 1$, $|V_2| = r - 1$ і всі вершини множини V_1 мають степінь r , а V_2 – степінь $r - 1$, відповідає 2-елементна $(q)CSS$.

Доведення. $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{r+1}\}$, $V_2 = \{x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_{2r}\}$;

M_i – множина міток усіх ребер, інцидентних вершині x_i , де $i = 1, 2, \dots, 2r$.

Поставимо у відповідність кожній вершині x_i графу G множину M_i .

Будуємо множину $M = \{M_1, M_2, \dots, M_{2r}\}$.

Кожен елемент з $[q] = \{1, 2, \dots, q\}$ належить рівно двом різним множинам з M .

M містить $r + 1$ множини потужності r і $r - 1$ множини потужності $r + 1$.

M задовольняє умови 2-елементною $(q)CSS$.

Конструкції з магічних прямокутників у визначенні дистанційної антимагічної розмітки

Ідея: Для графу $t(K_k \times K_n)$, який є диз'юнктивним об'єднанням t копій $K_k \times K_n$, використаємо множину магічних прямокутників $MRC(k, n; t)$.

Теорема 3. Граф $t(K_k \times K_n) \in \left(\frac{(k+n)(knt+1)-4knt}{2}, 2\right)$ -дистанційним антимагічним, якщо $k \equiv n \equiv 0(mod 2)$ і $k \geq 2, n \geq 4$.

Доведення. u_{ij}^l – вершина l -ої компоненти графу $t(K_k \times K_n)$, де $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n, 1 \leq l \leq t$.

Побудова розмітки:

Вершинам u_{ij}^l ставимо у відповідність елементи r_{ij}^l з $MRC(k, n; t)$.

Функція $f(u_{ij}^l) = r_{ij}^l$ є бієкцією $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, knt\}$.

Вага вершини: $w_f(u_{ij}^l) = \rho + \sigma - 2f(u_{ij}^l) = \rho + \sigma - 2r_{ij}^l$, де ρ – сума рядка, а σ – сума стовпця з $MRC(k, n; t)$.

Множина ваг утворює арифметичну прогресію з першим членом $a = \rho + \sigma - 2knt$ і різницею $d = 2$.

$$\rho + \sigma = \frac{(k+n)(knt+1)}{2}.$$

Умови антимагічності для f виконуються,

$f \in \left(\frac{(k+n)(knt+1)-4knt}{2}, 2\right)$ -дистанційною антимагічною розміткою графу $t(K_k \times K_n)$.

Спосіб побудови $MRC(2, 4; t)$ для $t \geq 3$.

1. Визначимо індекси $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4, l = 1, 2, \dots, t$.

2. Елементи r_{ij}^l з l -тої матриці розміру 2×4 задаємо за правилами:

$$r_{i1}^l = \begin{cases} l & \text{для } i = 1, \\ 8t - l + 1 & \text{для } i = 2, \end{cases} \quad r_{i2}^l = \begin{cases} 4t - l + 1 & \text{для } i = 1, \\ 4t + l & \text{для } i = 2, \end{cases}$$

$$r_{i3}^l = \begin{cases} 7t - l + 1 & \text{для } i = 1, \\ t + l & \text{для } i = 2, \end{cases} \quad r_{i4}^l = \begin{cases} 5t + l & \text{для } i = 1, \\ 3t - l + 1 & \text{для } i = 2. \end{cases}$$

Кожна матриця розміру 2×4 містить різні числа з множини $\{1, 2, \dots, 8t\}$

Наведено три матриці для конкретного $t=3$, які демонструють розподіл чисел у рядках і стовпцях.

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 21 & 16 \\ 24 & 13 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 11 & 20 & 17 \\ 23 & 14 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 10 & 19 & 18 \\ 22 & 15 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Зв'язок з графом:

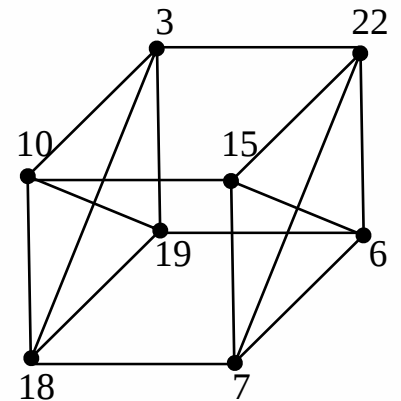
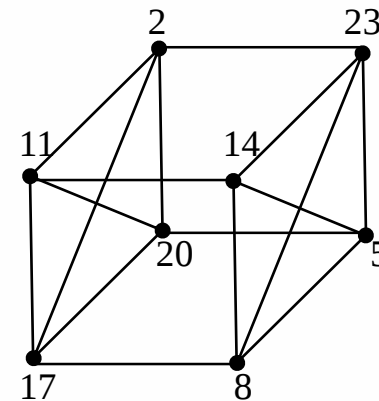
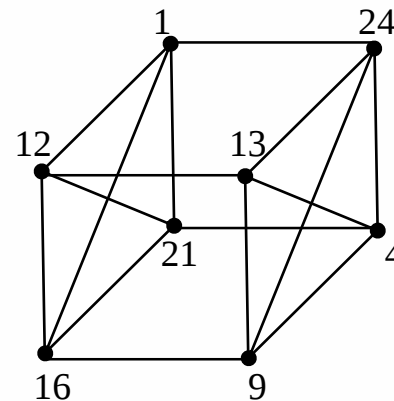
Кожна матриця відповідає компоненті графу $3(K_2 \times K_4)$.

Елементи матриці $\rightarrow$ вершини графу.

Суми рядків і стовпців матриці сталі $\rightarrow$ забезпечують антимагічність.

Ваги вершин утворюють арифметичну прогресію:

$a = 27, d = 2$.



Граф $3(K_2 \times K_4)$ має $(27, 2)$ -дистанційну антимагічну розмітку (рис.)

Масиви Коціга як інструмент побудови дистанційної магічної розмітки регулярних графів

Масивом Коціга $KA(a; b)$ розміру $a \times b$ – це $a \times b$ матриця: кожен рядок ї є перестановкою чисел множини $\{1, 2, 3, \dots, b\}$; сума елементів кожного стовпця стала: $\frac{1}{2}a(b + 1)$.

Введено Е. Марр і У. Уоллісом (на основі статті А. Коціга).

Використовується для побудови магічних та дистанційних магічних розміток графів.

Умови існування:

$KA(a, b)$ існує тоді і тільки тоді, коли $a > 1$? $a(b + 1)$ – парне;

$KA(2a; b)$ існує для будь-якого b ;

$KA(2a + 1; b)$ – для непарного b

Піднятий масив Коціга $LKA(a, b, l)$ – це $a \times b$ матриця з елементами $f_{ij} = e_{ij} + (i - 1)b + l$, де e_{ij} – елемент i -го рядка і j -го стовпця масиву $KA(a; b)$.

Сума кожного стовпця: $\sigma(a, b, l) = \frac{1}{2}a(ab + 2l + 1)$.

Масиви Γ -Коціга є ключовим інструментом для побудови групових дистанційних магічних розміток графів

Використовуємо для графів виду $H = G \otimes C_4$ регулярного графа G порядку n

Розглянемо абелеву групу Γ порядку n .

Масив Γ -Коціга:

Матриця $K = (k_{ij})$ розміру $m \times n$, $k_{ij} \in \Gamma$,

кожен рядок є переставленням елементів групи Γ ;

сума елементів кожного стовпця фіксована, тобто існує елемент μ , такий що

$\sum_{i=0}^{p-1} k_{ij} = \mu$ для всіх $j \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$.

Існування: коли $m > 1$ і m – парне, або Γ має непарний порядок або містить більш однієї інволюції.

Масиви Коціга як інструмент побудови дистанційної магічної розмітки регулярних графів

- Мітки вершин $\rightarrow$ з абелевої групи Γ .
- Вимога: сума міток суміжних вершин для кожної вершини = фіксований елемент групи.
- Поєднання теоретико-графових та алгебраїчних методів.

Нехай Γ – скінчена абелева група порядку mt , де $m, t \in \mathbb{N}$.

Властивість m -розбиття (m -zero-sum partition property, m -ZSP):

група Γ має m -розбиття з нульовою сумою, якщо існує таке розбиття Γ на m підмножини

$A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq \Gamma$, де $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = \Gamma$, $|A_i| = t$ для всіх $i = 1, 2, \dots, m$;

для кожного i виконується: $\sum_{x \in A_i} x = 0$, 0 – нульовий елемент групи.

Алгоритм 1. Побудова масиву Γ -Коціга на основі 4-ZSP розбиття.

Вхідні дані: скінчена абелева група Γ порядку $4n$, $n \in \mathbb{N}$.

Вихід: матриця $K = (k_{ij}) \in \Gamma^{4 \times n}$, яка є масивом Γ -Коціга.

Кроки:

Створюємо множини: A_0, A_1, A_2, A_3 .

Беремо пару елементів групи a_j, b_j .

Оновлюємо множини: $A_0 = A_0 \cup \{a_j\}$, $A_1 = A_1 \cup \{b_j\}$, $A_2 = A_2 \cup \{-a_j\}$, $A_3 = A_3 \cup \{-b_j\}$.

Повторюємо для наступних пар, поки всі елементи групи не будуть розподілені.

У кожному рядку матриці K розміщуємо перестановку елементів відповідної множини.

Перевіряємо: сума кожного стовпця дорівнює нульовому елементу групи.

Результат: отримаємо матрицю K , що є масивом Γ -Коціга:

Побудова Γ -групової дистанційної магічної розмітки для графа $H = G \otimes C_4$ на основі масиву Γ -Коціга

Алгоритм 2. Побудова Γ -групової дистанційної магічної розмітки графу $H = G \otimes C_4$

Вхідні дані: r -регулярний граф G порядку n ; цикл C_4 ; абелева група Γ порядку $4n$, що має 4-ZSP розбиття; є масив Γ -Коціга $K = (k_{ij}) \in \Gamma^{4 \times n}$.

Вихід: функція $f: V(H) \rightarrow \Gamma$, яка задає Γ -групову дистанційну магічну розмітку H .

Кроки: 1. Побудувати граф $H = G \otimes C_4$.

Вершини: (v_j, i) , де $v_j \in V(G)$, $i \in V(C_4)$, $0 \leq j \leq n - 1$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Для кожної вершини $(v_j, i) \in V(H)$ задати мітку: $f((v_j, i)) = k_{ij}$,

де k_{ij} елемент Γ з матриці K .

Результат. Отримана функція f задає Γ -групову дистанційну магічну вершинну розмітку $H = G \otimes C_4$.

Приклад. Γ -групова дистанційна магічна розмітка.

Вхідні дані: Граф $H = K_{3,3} \otimes C_4$. Група $\Gamma = Z_4 \times Z_6$, що допускає 4-ZSP розбиття.

Побудова масиву Γ -Коціга (Алгоритм 1)

Побудовано розбиття: $A_0 = \{(1,5), (2,1), (0,3), (1,1), (0,1), (1,3)\}$; $A_1 = \{(1,4), (0,2), (2,0), (1,2), (2,2), (1,0)\}$;

$A_2 = \{(3,1), (2,5), (0,3), (0,5), (3,5), (3,3)\}$; $A_3 = \{(3,2), (0,4), (2,0), (2,4), (3,4), (3,0)\}$

Матриця Γ -Коціга: На основі цих множин сформовано матрицю K розміру 4×6 .

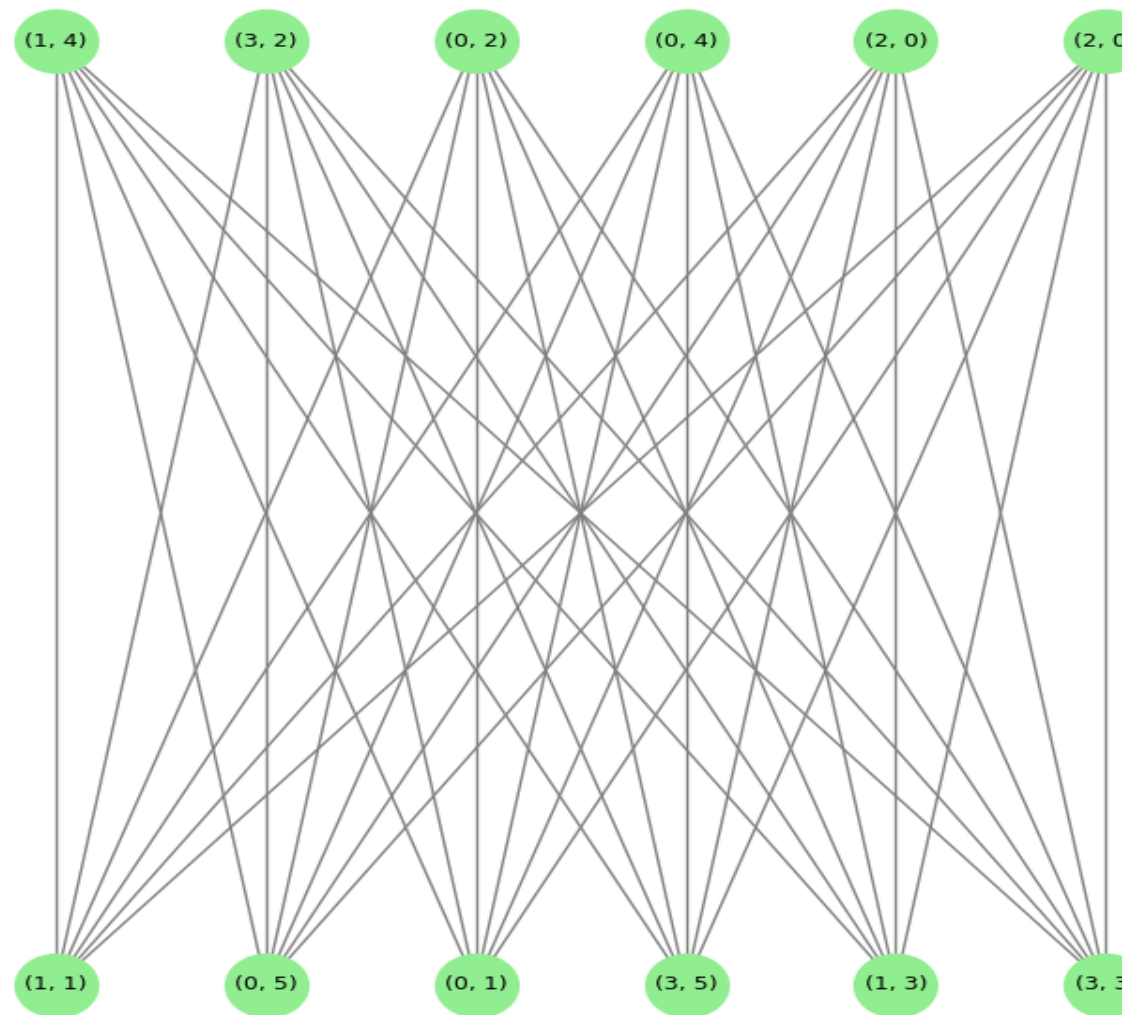
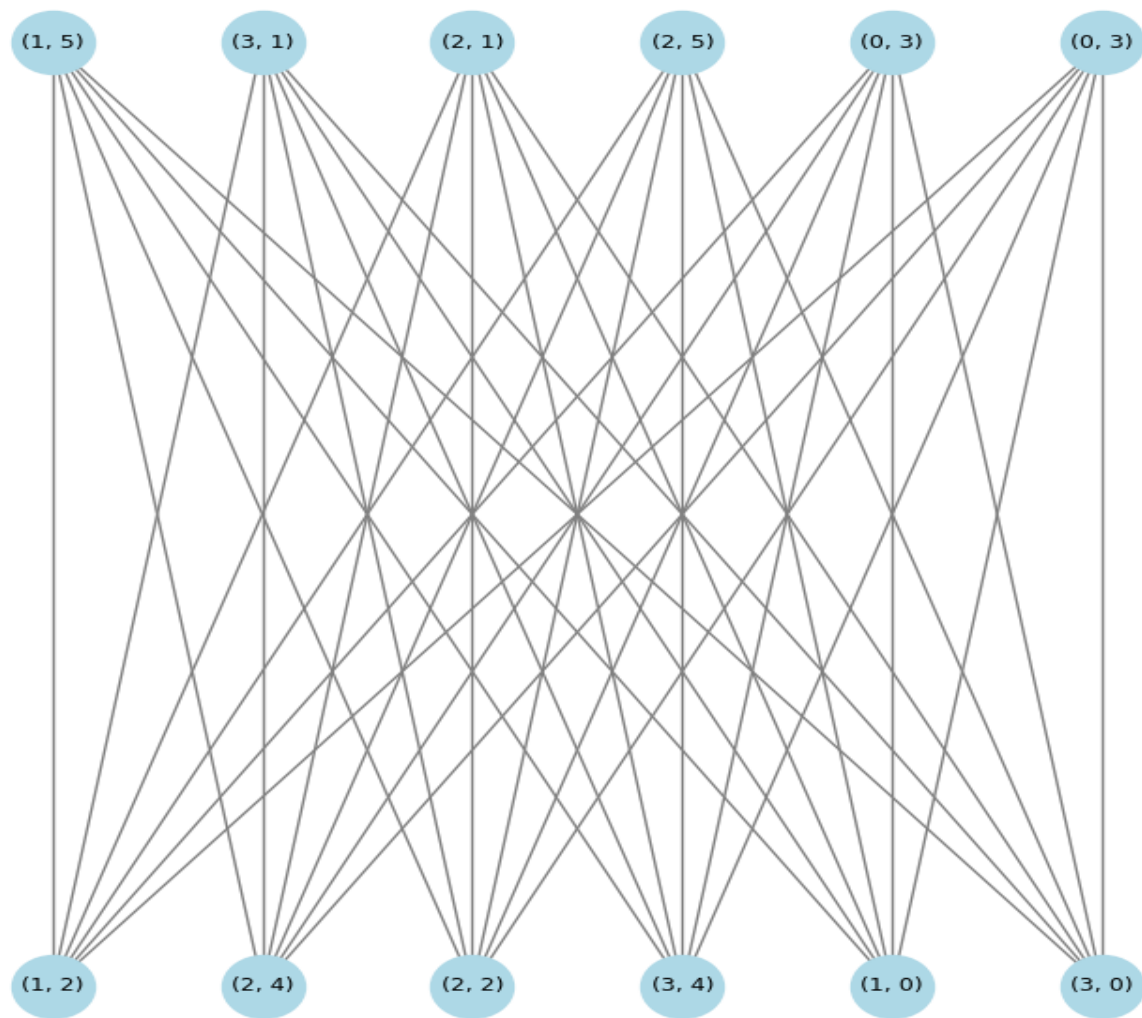
Кожен рядок – перестановка елементів відповідної множини A_i .

Сума кожного стовпця = $(0,0)$ — нульовий елемент групи.

Розмітка графу (Алгоритм 2)

Вершини H позначаються елементами матриці K .

Отримана розмітка є Γ -груповою дистанційною магічною.



Γ -групова дистанційна магічна розмітка графу $H = K_{3,3} \otimes C_4$

Дистанційна матриця графу. Графи з подібними дистанційними матрицями

$G = (V, E)$ – граф, $V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $|V| = n$, $D\{0, 1, \dots, d\}$, де $d = \text{diam}(G)$

D -дистанційна (або дистанційна) матриця $A_D = (a_{ij}^D)$:

$$a_{ij}^D = \begin{cases} 1, \text{ якщо } d(u_i, u_j) \in D, \\ 0, \text{ в інших випадках,} \end{cases} \text{ де } u_i, u_j \in V, 1 \leq i, j \leq n.$$

Симетрична, рядкові суми $= |N_D(u_i)|$. (i -й рядок).

Якщо $D = \{1\} \rightarrow A_D = A$.

Якщо $D = \{0, 1\} \rightarrow A_D = A + E$.

Загальний випадок: $A_D = A + A_1 + \dots + A_{d-1} + E$, якщо $0 \in D$;

$A_D = A + A_1 + \dots + A_{d-1}$, якщо $0 \notin D$,

де $A_s = (a_{ij}^{(s)}) \in M_n$ і $a_{ij}^{(s)} = 1$ при $d(u_i, u_j) = s + 1 \in D$, інакше $a_{ij}^{(s)} = 0$, $s = 1, 2, \dots, d - 1$.

Додавання матриць A_s виконуємо за правилом: присвоюємо значення 1 елементу $a_{ij}^{(s)}$, якщо сума відповідних елементів відмінна від нуля.

$f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ – бієкція

$$A_D X = kI$$

$X = (f(u_1) f(u_2) \dots f(u_n))^T$ – матриця міток; $I = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$, $k = \text{const}$ – натуральне число

Доведено єдиність магічної сталої для будь-якого дистанційного магічного графу.

Матриці A_{D_1} та A_{D_2} подібні, якщо існує матриця переставлення $\exists P$: $A_{D_1} = P^{-1}A_{D_2}P$.

Подібність є відношення еквівалентності на множині дистанційних матриць.

Властивості:

Неізоморфні графи одного порядку можуть мати подібні матриці.

Подібні матриці належать одному класу еквівалентності.

Теорема 4. Нехай G і H є графи порядку n з подібними дистанційними матрицями A_{D_1} і A_{D_2} відповідно. Граф G є D_1 -дистанційним магічним тоді і тільки тоді, коли H – D_2 -дистанційний магічний граф.

Доведення. A_{D_1} і A_{D_2} належать одному і тому ж класу подібних матриць.

Припустимо: f – D_1 -дистанційна магічна розмітка графу $G \rightarrow$ існує переставлення X^0 і число k_0 :
 $A_{D_1}X^0 = k_0I$.

Оскільки $A_{D_1} = P^{-1}A_{D_2}P$, маємо $P^{-1}A_{D_2}PX^0 = k_0I$. Помножимо зліва на P : $A_{D_2}PX^0 = k_0PI$.

Вектор $PX^0 = X^{0*}$ – одне з переставлень чисел $1, 2, \dots, n$.

Отже, переставлення $(X^{0*})^T$ задає D_2 -дистанційну магічну розмітку H з магічною сталою k_0 .

Аналогічні міркування призводять до доведення оберненого твердження теореми.

Наслідок 1. Для будь-яких магічних дистанційно-подібних графів їх дистанційні магічні сталі збігаються.

Теорема 5. Якщо вершинна розмітка f графу G є D -дистанційною магічною з магічною сталою k , то для D -надграфа G_D бієкція f породжує: 1) дистанційну магічну розмітку при $0 \notin D$; 2) $(k-n, 1)$ -дистанційну антимагічну розмітку при $0 \in D$.

Наслідок 2. Якщо G є (D, r) -регулярним D -дистанційним магічним графом порядку n з магічною сталою k , то $k = \frac{r(n+1)}{2}$ коли $0 \notin D$ і $k = \frac{(r+1)(n+1)}{2}$ коли $0 \in D$.

Спектральні властивості дистанційних матриць

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – власні значення A_D утворюють дистанційним спектром цього графу G ,

A_D – ермітова матриця $\rightarrow$ усі μ_i – дійсні числа;

Впорядкування: $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$.

Лема 1. Дистанційні спектри дистанційно-подібних графів співпадають.

Спектральні властивості дистанційних матриць

Теорема 6. Для коефіцієнтів характеристичного многочлена

$P_{A_D}(\mu) = c_0\mu^n + c_1\mu^{n-1} + c_2\mu^{n-2} + \dots + c_{n-1}\mu + c_n$ дистанційної матриці A_D графу G порядку n мають місце такі співвідношення:

- 1) $c_0 = 1$;
- 2) $c_1 = 0$, якщо $0 \notin D$ і $c_1 = -n$, якщо $0 \in D$;
- 3) $-c_2 = q$, якщо $0 \notin D$ і $c_2 = \frac{n(n+1)}{2} - q$, якщо $0 \in D$, де q – число ребер в D -надграфі G_D ;
- 4) $-c_3 = 2t$, якщо $0 \notin D$ і $c_3 = n(q - n) - 2t - C_n^3$, якщо $0 \in D$, де t – число трикутників в D -надграфі G_D .

□

Наслідок 3. Нехай μ власне значення дистанційної матриці A_D графу G , а λ – власне значення матриці суміжності вершин A D -надграфа G_D . Тоді $P_{A_D}(\mu) = P_A(\lambda)$, де $\mu = \lambda$, якщо $0 \notin D$ і $\mu = \lambda + 1$, якщо $0 \in D$.

Теорема 7 Якщо $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ – дистанційний спектр графу G порядку n , то $\rho(A_D) = \mu_1$,
 $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2 = \sum_{i=1}^n |N_D(u_i)|$, де $u_i \in V(G)$.

Наслідок 4. Для (D, r) -регулярного графу G порядку n маємо $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2 = nr$, якщо $0 \notin D$ і
 $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \dots + \mu_n^2 = n(r + 1)$, якщо $0 \in D$.

Теорема 8. Якщо G – (D, r) -регулярний граф, то $\rho(A_D) = r$ при $0 \notin D$ і $\rho(A_D) = r + 1$ при $0 \in D$.

Теорема 9. Нехай G_i – зв'язний (D_i, r) -регулярний граф, де $i = 1, 2, \dots, s$ і $\bigcup_{i=1}^s D_i = D$.

Якщо $G = G_1 G_2 \cup \dots G_s$ і $\bigcap_{i=1}^s G_i = \emptyset$, то G є (D, r) -регулярним графом і кратність власного значення r при $0 \notin D$ і $r + 1$ при $0 \in D$ дистанційної матриці A_D дорівнює s .

Спектральні властивості дистанційних матриць

Теорема 10. Нехай G_i – зв'язний (D_i, r) -регулярний граф, де $i = 1, 2, \dots, s$ і $\bigcup_{i=1}^s D_i = D$. Якщо $G = G_1 G_2 \cup \dots G_s$ і $\bigcap_{i=1}^s G_i = \emptyset$, то G є (D, r) -регулярним графом і кратність власного значення r при $0 \notin D$ і $r + 1$ при $0 \in D$ дистанційної матриці A_D дорівнює s .

Доведення. 1) Зв'язний (D, r) -регулярний граф G порядку n , тобто $G = G_1$ і $D = D_1$.

$0 \notin D$, D -дистанційна матриця A_D графу G є матрицею суміжності D -надграфу G_D .

Очевидно, G_D – r -регулярний зв'язний граф $\rightarrow r$ – власне значення кратності один $\rightarrow \det(\mu E - A_D) = (\mu - r)P_{n-1}(\mu)$, де μ – власне значення A_D , $P_{n-1}(\mu)$ – многочлен степені $n - 1$.

$0 \in D$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ – власні значення $A_D \rightarrow \mu_i = \lambda_i + 1$, $\rho(A_D) = \mu_1 = r + 1 = \lambda_1 + 1$ і $\lambda_1 = r = \rho(A)$, де λ_i – власні значення матриці суміжності вершин $A = A_D - E$ r -регулярного D -надграфа G_D . Отже, кратність власного значення $r + 1$ дорівнює одиниці $\rightarrow$ характеристичний многочлен і A_D : $\det(\mu E - A_D) = (\mu - (r + 1))P_{n-1}(\mu)$.

2) Граф G порядку n з s компонентами зв'язності $G_1, G_2, \dots, G_s$, G_i – (D_i, r) -регулярний граф, $V(G_i) = t_i$, де $i = 1, 2, \dots, s$. A_D графу G є блочно-діагональною, а граф G – (D, r) -регулярним.

Позначимо A_{ii} блок, що відповідає D_i -дистанційній матриці підграфу G_i графу G . Тоді $A_D = \sum_{i=1}^s A_{ii}$. Для матриці μE використовуємо аналогічне подання: $\mu E = \sum_{i=1}^s \mu E_{ii}$, де матриці E_{ii} і A_{ii} мають однакові порядки. Тоді

$$\det(\mu E - A_D) = \det\left(\sum_{i=1}^s \mu E_{ii} - \sum_{i=1}^s A_{ii}\right) = \det\left(\sum_{i=1}^s (\mu E_{ii} - A_{ii})\right).$$

$0 \in D$, то на підставі властивостей блочно-діагональних матриць і результатів щодо кратності кореня $r + 1$ матриці A_{ii} отримаємо $\det(\mu E - A_D) = (\mu - (r + 1))^s P_{t_1-1}(\mu) P_{t_2-1}(\mu) \dots P_{t_s-1}(\mu)$, де $\det(\mu E_{ii} - A_{ii}) = P_{t_i}(\mu) = (\mu - (r + 1))P_{t_i-1}(\mu)$, $P_{t_i}(\mu)$ – многочлен степені t_i , $i = 1, 2, \dots, s$. Аналогічний результат виходить при $0 \notin D$.

Дистанційна магічна матриця графу та її властивості

Нехай граф G порядку n має вершинну розмітку $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ – бієкція.

Побудуємо матрицю $A^* = (a_{ij}^*)$ з дистанційної матриці $A_D = (a_{ij}^D)$ заміною кожного одиничного елемента a_{ij}^D на число $f(u_j)$, тобто

$$a_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_{ij}^D = 0 \\ f(u_j), & \text{якщо } a_{ij}^D = 1. \end{cases}$$

A^* називають матрицею розмітки f .

Якщо f – D -дистанційна магічна розмітка, A^* – дистанційна магічна то матриця.

Властивості:

Кожен рядок i матриці A^* містить мітки вершин з D -околу вершини u_i .

Сума елементів рядка = вага вершини u_i .

Якщо розмітка магічна, то всі рядки мають однакову суму = магічна стала k .

Теорема 11. Нехай G – D -дистанційний магічний граф порядку n і $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ – власні значення дистанційної магічної матриці A^* , тоді

1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* = 0$, якщо $0 \notin D$ і $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* = \frac{n(n+1)}{2}$, якщо $0 \in D$;

2) $\sum_{i=1}^n \lambda_i^{*2} = \frac{kn(n+1)}{2}$, де k – дистанційна магічна стала.

Теорема 12. Якщо граф G допускає D -дистанційну магічну розмітку з магічною сталою k , то число k є власним значенням дистанційної магічної матриці A^* і $\rho(A^*) = k$.

Необхідна умова існування збалансованої суміжно-нульової розмітки узагальненого графу Петерсена

Узагальнений граф Петерсена $GP(n, k) \rightarrow$ граф порядку $2n$ з $V(GP(n, k)) = \{x_i, y_i : i \in Z_n\}$,
 $E(GP(n, k)) = \{(x_i, x_{i+1}), (y_i, y_{i+k}), (x_i, y_i) | i \in Z_n\}$, де індекси беруться за модулем n ($n \geq 3$) і $1 \leq k < \frac{n}{2}$.

Властивості:

$GP(n, k) \cong GP(n, n - k)$;

усі узагальнені графи Петерсена є кубічними графами;

при непарному k граф $GP(n, k)$ є дводольним.

Підграфи C_1 і C_2 графу $GP(n, k)$ з $V(C_1) = \{x_i : i \in Z_n\}$, $V(C_2) = \{y_i : i \in Z_n\}$, $E(C_1) = \{(x_i, x_{i+1}) | i \in Z_n\}$,
 $E(C_2) = \{(y_i, y_{i+k}) | i \in Z_n\}$ – відповідно зовнішній та внутрішній цикли, а ребра виду (x_i, y_i) – спиці.

Підграф C_2 містить НСК(n, k) циклів порядку $\frac{n}{\text{НСК}(n, k)}$.

Лема 2. Якщо r -регулярний граф G порядку n допускає збалансовану суміжно-нульову розмітку, тоді $n \equiv 0(\text{mod}4)$ при $r \equiv 1(\text{mod}2)$ або $n \equiv 0(\text{mod}2)$ при $r \equiv 0(\text{mod}2)$.

Наслідок 5. Якщо узагальнений граф Петерсена $GP(n, k)$ допускає збалансовану суміжно-нульову розмітку, тоді $n \equiv 0(\text{mod}2)$.

Теорема 13. Якщо узагальнений граф Петерсена $GP(n, k)$ допускає збалансовану суміжно-нульову розмітку, то $n \equiv 0 \pmod{6}$, $k = 6l \pm 1$ або $n \equiv 0 \pmod{3}$, $k = 3s \pm 1$, де $l, s \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай f – збалансована суміжно-нульова розмітка $GP(n, k)$, A матриця суміжності.

Розглянемо матричне рівняння $AX = O$, де $X = (f(x_1) \dots f(x_n) f(y_1) \dots f(y_n))^T$, $O = (0 \dots 0 \ 0 \dots 0)^T$.

$A \in Z_2^{2n \times 2n} \rightarrow A = \begin{pmatrix} C_n & I \\ I & D_{n,k} \end{pmatrix}$, де C_n і $D_{n,k}$ – матриці суміжності підграфів C_1 і C_2 відповідно, I – одинична матриця порядку n .

$$\det A = \det(C_n \cdot D_{n,k} - I^2) = \det(C_n \cdot D_{n,k} - I).$$

$C_n, D_{n,k}$ – циркулянтні матриці $\rightarrow$ Матриця $C_n \cdot D_{n,k}$ – циркулянтна матриця. Власні значення знайдемо через дискретне перетворення Фур'є:

$$\lambda_j(C_n) = 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right), \quad \lambda_j(D_{n,k}) = 2 \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right), \text{ де } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$\mu_j = \lambda_j(D_{n,k}) \cdot \lambda_j(C_n) = 4 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) - \text{власне значення матриці } C_n \cdot D_{n,k}.$$

$$\det A = \prod_{j=0}^{n-1} (4 \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) - 1); \quad \det A = 0; \quad \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \in \left\{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\} \text{ і } \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) \in \left\{0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) = \frac{1}{4} \leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = \frac{1}{2}, & \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = -\frac{1}{2}, \\ \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) = -\frac{1}{2}. \end{cases} \\ \cos\left(\frac{2\pi jk}{n}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Перша система для натуральних значень $k = 6l \pm 1$, де $l \in \mathbb{N}$, має розв'язки, при $n \equiv 0 \pmod{6}$. Для другої системи розв'язки існують тільки при $n \equiv 0 \pmod{3}$ і $k = 3s \pm 1$, $s \in \mathbb{N}$.

Отже, $\det A \neq 0$, якщо $k \neq 6l \pm 1$, $k \neq 3s \pm 1$, $l, s \in \mathbb{N}$. В цьому випадку матричне рівняння $AX = O$ буде мати єдиний нульовий розв'язок і $GP(n, k)$ не буде допускати збалансовану суміжно-нульову розмітку для будь-якого n .

Необхідні умови існування дистанційної магічної розмітки 4- і 2-регулярних графів

Теорема 14. Граф $mK_{4,4}$ є дистанційним магічним для будь-якого натурального числа $m \geq 1$.

Теорема 15. Граф $mK_{2,2,2}$ є дистанційним магічним для будь-якого натурального числа $m \geq 1$.

Теорема 16. Граф mC_4 допускає дистанційну магічну розмітку для будь-якого $m \geq 1$.

Достатня умова існування дистанційної магічної розмітки графу

Теорема 17. Нехай $G = (V, E)$ – дистанційний магічний граф, відмінний від $K_{1,2,2,\dots,2}$. Тоді множину його вершин V можна так розбити на підмножини $V_1, V_2, \dots, V_p$, що $|V_i| > 1$ і індукований підграф $G(V_i)$ є порожнім для кожного $i = 1, 2, \dots, p$.

Наслідок 6. Нехай $G = (V, E)$ – дистанційний магічний r -регулярний граф порядку n . Тоді для потужності будь-якої незалежної множини $V_i \subseteq V$ в G справедлива подвійна нерівність $1 < |V_i| \leq \frac{\lambda n}{\lambda - r}$, де λ – мінімальне власне число матриці суміжності графу G .

Дистанційна магічна розмітка декартового добутку графів

Теорема 18. Нехай G_1 і G_2 є r_1 - та r_2 -регулярними графами, відповідно, $|V(G_1)| = n \geq 2$, $|V(G_2)| = m \geq 2$. Якщо степені r_1 і r_2 мають різну парність, то декартів добуток $G_1 \times G_2$ не допускає дистанційної магічної розмітки.

Наслідок 7. Якщо G – r -регулярний граф порядку n з непарним r , то граф $G \times C_m$ не допускає дистанційної магічної розмітки для будь-яких натуральних чисел $n \geq 2, m \geq 3$.

Наслідок 8. Нехай G – r -регулярний граф порядку $n \geq 2$. Тоді граф $K_m \times G$ не допускає дистанційної магічної розмітки для будь-яких натуральних чисел $m \geq 2$, якщо виконується одна з умов

а) $r \equiv 1(\text{mod}2)$ і $m \equiv 1(\text{mod}2)$ або б) $r \equiv 0(\text{mod}2)$ і $m \equiv 0(\text{mod}2)$.

Теорема 19. Якщо граф $K_n \times C_m$, де $n \geq 3$ – непарне, $m \geq 4$, є дистанційним магічним, то $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \dots \Sigma_n = m(mn + 1)/2$, де $\Sigma_i = \sum_{j=1}^m f_{ij}$.

Теорема 20. Граф $K_n \times C_m$ є дистанційним магічним за таких умов: 1) $n = 1$ і $m \in \{1, 4\}$; 2) n – непарне ($n \geq 5$) і $m \equiv 0(\text{mod}4)$;

3) $n \equiv 3(\text{mod}4)$ і $m \equiv 0(\text{mod}2)$.

Теорема 21. 1. Граф $C_1 \times P_n$ є дистанційним магічним тоді і тільки тоді, коли $n = 1$ або $n = 3$.

2. Граф $C_2 P_n$ є дистанційним магічним тоді і тільки тоді, коли $n = 2$.

Теорема 22. Нехай $n \equiv 0(\text{mod}4)$ і $m \geq 3$. Якщо граф $C_m \times P_n$ допускає дистанційну магічну розмітку, то $4m \equiv 2(\text{mod}(n + 2))$.

Властивості дистанційної магічної розмітки композиції графів

Теорема 23. Якщо граф H має дві вершини x, y степеня один і не містить ланцюг (x, z, y) , то для довільного графу G порядку n , $n \geq 2$, граф $G[H]$ не допускає дистанційну магічну розмітку.

Теорема 24. Якщо граф H має дві вершини x, y степеня один і не містить ланцюг (x, z, y) , то для довільного графу G порядку n , $n \geq 2$ з компонентою порядку s , $s \geq 2$, граф $G[H]$ не допускає дистанційну магічну розмітку.

Теорема 25. Граф $P_m[P_n]$ допускає дистанційну магічну розмітку тоді і тільки тоді, коли

1) $m = 1, n = 1$ або $n = 3$;

2) $m = 3, n = 1$.

Теорема 26. Граф $P_m[C_n]$ допускає дистанційну магічну розмітку:

1) для $m = 1$ тільки при $n = 1$ або $n = 4$;

2) для $m = 2$ тільки при $n = 4$;

3) для $m = 3$ тільки при $n = 1$.

При $m > 3$ і $1 \leq n \leq 3$, $n \geq 5$ граф $P_m[C_n]$ не є дистанційним магічним.

Про дистанційну магічну розмітку деяких конструкції графів

Розглянемо граф G і його підграфи $\langle S_1 \rangle$, $\langle S_2 \rangle$, $\langle S_3 \rangle$, породжені відповідними множинами вершин

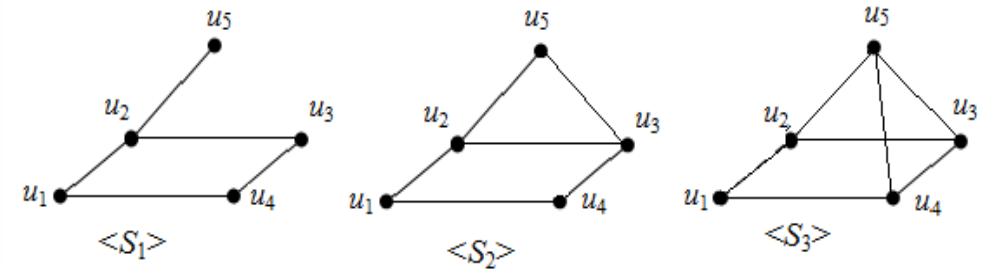
$S_i = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \subseteq V(G)$ (рис. 6.1). При цьому множини ребер мають вигляд:

$$E(\langle S_1 \rangle) = \{(u_1, u_2), (u_1, u_4), (u_2, u_5), (u_2, u_3), (u_3, u_4)\}$$

$$E(\langle S_2 \rangle) = \{(u_1, u_2), (u_1, u_4), (u_2, u_5), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_3, u_5)\}$$

$$E(\langle S_3 \rangle) = \{(u_1, u_2), (u_1, u_4), (u_2, u_5), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_3, u_5), (u_4, u_5)\}.$$

Лема 3. Якщо граф G містить в якості підграфу один із графів G_1 , G_2 , G_3 і $\langle S_1 \rangle$, $\langle S_2 \rangle$, $\langle S_3 \rangle$ є породженими підграфами множиною вершин $S_i = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \subseteq V(G)$ графу G , а також $\langle S_1 \rangle G_1$, $\langle S_2 \rangle G_2$, $\langle S_3 \rangle G_3$, то G не допускає дистанційної магічної розмітки.



Діаграми графів $\langle S_1 \rangle$, $\langle S_2 \rangle$, $\langle S_3 \rangle$

Теорема 27. Граф $G = \langle C_m : P_t : C_n \rangle$, відмінний від $\langle C_2 : P_1 : C_2 \rangle$, не є дистанційним магічним графом, де $t \geq 1$, $m \geq 2$ і $n \geq 2$ – натуральні числа.

Теорема 28. Граф G , який є ланцюговим з'єднанням t копій циклу C_m , не допускає дистанційної магічної розмітки для будь-яких натуральних чисел $t \geq 2$, $m \geq 2$.

Теорема 29. Корона $P_m P_n$ не є дистанційним магічним графом для будь-яких натуральних чисел m і n .

Наслідок 9. Віяло F_n не допускає дистанційної магічної розмітки для будь-якого натурального числа n .

Теорема 30. Корона $P_m C_n$ є дистанційним магічним графом тоді і тільки тоді, коли $m = 1$ і $n = 4$.

Теорема 31. Корона $C_m P_n$ не є дистанційним магічним графом для будь-яких натуральних чисел m і n .

Теорема 32. Корона $C_m C_n$ не є дистанційним магічним графом для будь-яких натуральних чисел $m > 1$ і $n \geq 1$.

Дистанційна магічна розмітка і графи Келі

Група діедра (діедральні група) D_{2n} – циклічна група порядку $2n$, $D_{2n} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$. Нехай $S \subset D_{2n}$. Приклади графів Келі $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S)$ для $|S| = 1; 2; 3$, дослідимо наявність дистанційної магічної розмітки.

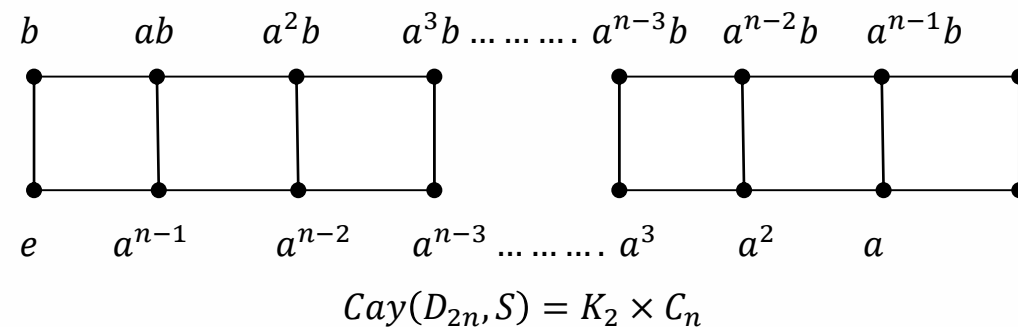
Приклад 1. $|S| = 1$, тоді граф Келі $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S) = nK_2$ не є дистанційним магічним.

Приклад 2. $S = \{a, a^{-1}\}$, $a \neq a^{-1}$, $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S) = \frac{2n}{m} C_m$ і $o(a) = m$.

Приклад 3. $S = \{a, b\}$, $a^2 = b^2 = e$, $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S) = \frac{2n}{m} C_{2m}$, і $o(ab) = m$.

Приклад 4. $D_{2n} = \langle a, b \mid a^n = b^2 = e, bab = a^{-1} \rangle$,
 $S = \{a, a^{-1}, b\}$, $2n \geq 6$, $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S) = K_2 \times C_n$ (рис.).

Множини суміжності вершин a^{n-2} і ab $\Gamma = K_2 \times C_n$:
 $N(a^{n-2}) = \{a^{n-1}, a^{n-3}, a^2b\}$, $N(ab) = \{b, a^2b, a^{n-1}\}$.
 $|N(a^{n-2}) \cap N(ab)| = \deg(a^{n-2}) - 1 = \deg(ab) - 1 = 2$.
 Граф не є дистанційним магічним.



Приклад 5. $S = \{a, a^{-1}, b\} D_{2n}$, де $a \neq a^{-1}$, $b^2 = e$, тоді маємо $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S) = \frac{n}{m} (K_2 \times C_n)$.

Приклад 6. $S = \{a, b, c\} D_{2n}$, де $n \geq 3$, $|S| = 3$ і $a^2 = b^2 = c^2 = e$, тоді маємо $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S) = K_2 \times C_n$.

Для будь якого графу з прикладів 5 і 6 знайдуться дві вершини x і y : $|N(x) \cap N(y)| = \deg(x) - 1 = \deg(y) - 1 = 2$. Ці графи не є дистанційним магічним

Теорема 33. Графи $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S)$ не є дистанційними магічними при 1) $|S| = 1$;

2) $S = \{a, a^{-1}, b\} D_{2n}$, де $a \neq a^{-1}$, $b^2 = e$; 3) $S = \{a, b, c\} D_{2n}$, де $n \geq 3$, $|S| = 3$ і $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

Граф $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S)$, де $S = \{a, a^{-1}\}$, $a \neq a^{-1}$ і $o(a) = m$ є дистанційним магічними тоді і тільки тоді, коли $m = 4$ і n – парне. Граф $\Gamma = \text{Cay}(D_{2n}, S)$, де $S = \{a, b\}$, $a^2 = b^2 = e$ і $o(ab) = m$ є дистанційним магічними тоді і тільки тоді, коли $m = 2$ і n – парне.

Планування справедливих та еквівалентних неповних турнірів (FIT; EIT)

Характеристи ка	FIT(n, r) (fair incomplete tournament)	EIT($n, n - r - 1$) ((Equivalent incomplete tournament))
Означення турніру	n команда, кожна грає r матчів ($r < n - 1$); Будується з повного кругового турніру видаленням частини матчів, але зберігається умови рівномірного розподілу ігор між учасниками.	n команда, кожна грає $n - r - 1$ матчів; утворюється з пропущених ігор FIT
Розмітка графу	Турнір моделюється r -регулярним графом. Вершини графу отримують мітки матчів $\rightarrow$ автоматичне складання розкладу. Дистанційна магічна розмітка: кожна вершина має однакову «силу» опонентів; Баланс досягається через рівність ваг вершин. Формула сили опонентів: $S_{n,r}(i) = \frac{n(n+1)}{2} + i - k$, де i – ранг команди, k – стала, однакова для всіх учасників.	Турнір моделюється $(n - r - 1)$ -регулярним графом Гандикап-розмітка (handicap labeling) Вершини графу отримують мітки матчів $\rightarrow$ автоматичне складання розкладу. кожна вершина має однакову «силу» опонентів: $S_{n,n-r-1}^* = k$
Переваги (моделі з розміткою)	Баланс кількості матчів і контрольовану силу суперників. Алгоритмічність. Універсальність: застосовується у спортивних турнірах, рейтингових системах, багатокритеріальних задачах.	Повний баланс сил. Усунення переваги сильних команд.
Недоліки	Хоча кількість матчів рівна, сильні команди зберігають перевагу.	Не відтворює складність повного турніру. Потребує спеціальних інструментів побудови.

Схема 1 побудови EIT(n, r)

Розглянемо EIT(n, r), що задовольняє умові $r = 2^s q$, де q – непарне число, $q > 1$, $s \geq 1$ і $n = tq$ для деякого непарного t , $t \geq 2^s + 1$ (див. табл. 2.1). Для побудови графу цього турніру виділимо три етапи і опишемо детально кожен із них.

Етап 1. Скористаємося тим фактом, що для непарного t повний граф K_t має розклад на Гамільтонові цикли. Таким чином, існує 2^s -регулярний фактор F графу K_t . Задамо F .

Етап 2. Будуємо граф $G = F[\overline{K}_q]$, що є композицією графів F і $\overline{K}_q$. Граф G є $2^s q$ -регулярним і складається з q ізоморфних копій фактору F . Суміжність вершин різних копій визначається правилами побудови композиції. Позначимо через $\{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{tj}\}$ – множину вершин j -ої копії F .

Етап 3. Будуємо зміщений масив Коціга $LKA(q, t; 0) = (f_{ij})$. Розмітку f графу G задаємо у такий спосіб: $f(x_{ij}) = f_{ij}$, де $i = 1, 2, \dots, t$, $j = 1, 2, \dots, q$. Оскільки кожна вершина x_{ij} буде суміжною з 2^s вершинами однієї копії, то її вага визначається за формулою $w(x_{ij}) = 2^{s-1} q(qt + 1)$, де $c = q(qt + 1)/2$ – сума елементів стовпця масиву $LKA(q, t; 0)$.

Теорема 34. Нехай q і t – непарні числа, $q > 1$, $s \geq 1$ і $t \geq 2^s + 1$. Нехай F – 2^s -регулярний фактор повного графу K_t . Тоді граф композиції $G = F[\overline{K}_q]$ є графом еквівалентного неповного турніру EIT(n, r) з параметрами $n = tq$ та $r = 2^s$.

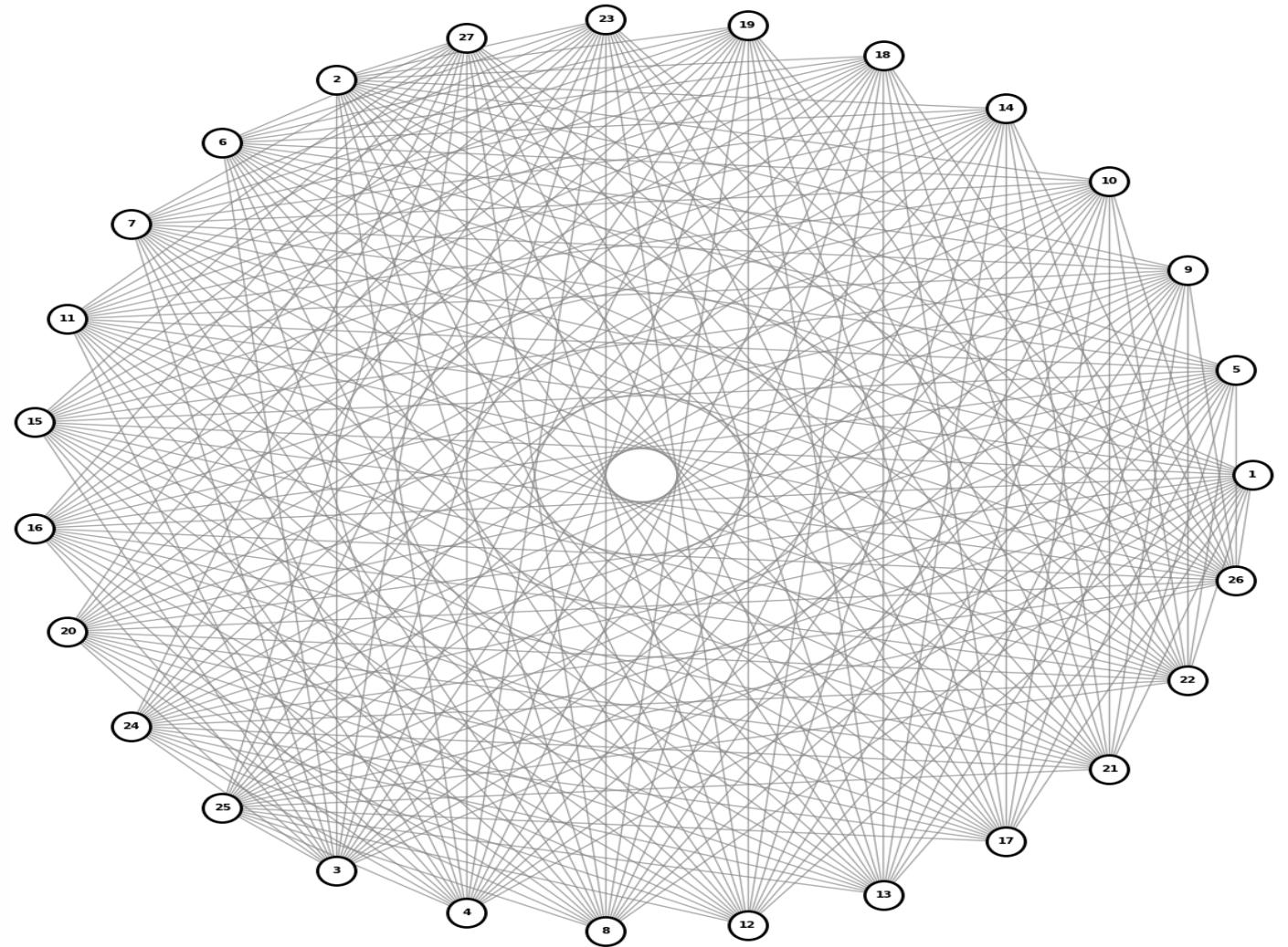
Приклад : EIT(27,18)

- Задача: формування розкладу спортивних змагань для $n=27$ команд, де кожен учасник проводить рівно $r=18$ поєдинків.
- Ідентифікатори: кожній команді присвоєно унікальний рейтинговий номер (1–27), що відображає її кваліфікацію.
- Вимога справедливості: сума рейтингів усіх суперників для будь-якого учасника є сталою → відсутність систематичної переваги сильних команд.
- Модель: конструкція графу класу EIT(27,18), побудована за схемою 1 та теоремою 8.1.
- Алгоритм реалізації (Python, NetworkX, Matplotlib):
 - Етап 1 → `build_factor_F()`
 - Етап 2 → `build_tournament_graph()`
 - Етап 3 → `apply_kotzig_labeling()`
- Результат:

Всього учасників: 27

Поєдинків на учасника: 18

вага вершини: 252



Турнірний граф EIT(27,18)

Схема 2 побудови регулярного гандикап графу

Етап 1. Побудова 1-фактору F_1 з ребрами на відстані $4k$. Вага вершини: $w(i) = 4k + i$ для $i \in \{1, 2, \dots, 4k\}$;

$w_r(i) = -4k + i$ для $i \in \{4k + 1, 4k + 2, \dots, 8k\}$.

Етап 2. Побудова 1-факторів F_2, F_3 : відстані $\rho_2(i, j) = 1$ для кожного ребра (i, j) графу F_2 ;

$\rho_3(i, j) \in \{2, 6, \dots, 4k - 6, 4k - 2\}$ для ребер (i, j) графу F_3

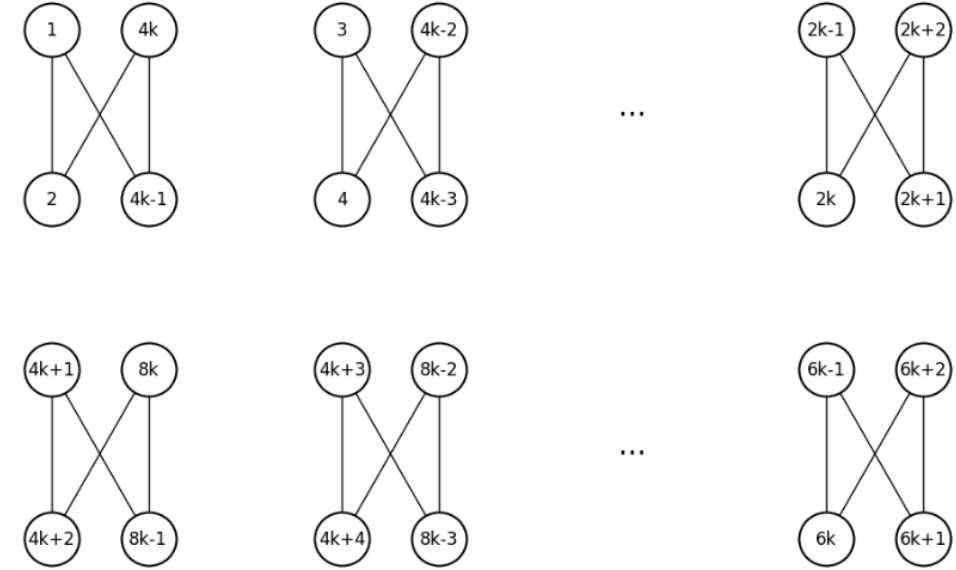
$F_2 \cup F_3 \rightarrow$ компоненти графу $K_{2,2}$ (рис.).

Етап 3. Збільшення степені r графу, отриманого після 2-го етапу з урахуванням умов: $r \leq n - 5$, $r \equiv 1, 3 \pmod{4}$.

Додавання 1-фактори $F_4, F_5, \dots$

Граф $\bigcup_{i=1}^5 F_i \in$ 5-регулярним гандикап графом. Вага вершини $w(i) = 16k + 2 + i$ для $i \in \{1, 2, \dots, 8k\}$.

Повторюючи дії, описані на 3-му етапі, продовжуємо збільшувати степінь r графу $\bigcup_{i=1}^5 F_i$ поки не отримаємо необхідний гандикап граф $G = \bigcup_{i=4}^{s+3} F_i$.



Граф $F_2 \cup F_3$

Алгоритм 8.1 «ГАНДИКАП» (побудови $2s + 3$ -регулярного гандикап графу порядку $n \equiv 0(\text{mod}8)$)

Вхідних дані $\rightarrow$ масив чисел $(1, 2, \dots, n)$, матриця циклів $C = [C_1, C_2, \dots, C_{2k}]$, $C_i = [0, 0, 0, 0]$, $1 \leq i \leq 2k$.

1. Побудова 1-факторів F_1, F_2, F_3 $1 \leq i \leq 4k$, $j = 4k + i$, маємо $(i, j) \in E(F_1)$; $t = 1, 2, \dots, 4k$, $i = 2t - 1$, $j = 2t$, маємо $(i, j) \in E(F_2)$; $t = 1, 2, \dots$, $i_1 = 2t - 1$, $i_2 = 2t$, $j_1 = 4k - i_1$ і $j_2 = 4k + 2 - i_2$, маємо $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in E(F_3)$;

2. Побудова 2-факторів $F_t \cup F_{t+1}$, де $t = 4, 6, \dots, 2s + 2$.

Використання дільників числа $4k$ ($2 \leq l \leq 4k$) для побудови циклів.

$1 \leq i_1 \leq 4k \rightarrow i_2 = i_1 + l, j_1 = 8k + 1 - i_1, j_2 = 8k + 1 - i_2 \rightarrow C' = [i_1, i_2, j_1, j_2]$.

$F_t \cup F_{t+1}$: $1 \leq i \leq 2k$, $C_i = [i_1^*, i_2^*, j_1^*, j_2^*] \in C$, якщо $C_i = [0, 0, 0, 0] \in C$, то $C_i = C' \in C$, інакше виконуємо порівняння C_i і C' , якщо $i_1 \neq i_1^*, i_1 \neq i_2^*, i_1 \neq j_1^*, i_1 \neq j_2^*; i_2 \neq i_1^*, i_2 \neq i_2^*, i_2 \neq j_1^*, i_2 \neq j_2^*; j_1 \neq i_1^*, j_1 \neq i_2^*, j_1 \neq j_1^*, j_1 \neq j_2^*; j_2 \neq i_1^*, j_2 \neq i_2^*, j_2 \neq j_1^*, j_2 \neq j_2^*$,

то C' і C_i є різними компонентами зв'язності графу $F_t \cup F_{t+1}$ і $C_{i+1} = C' \in C$, інакше $C' \notin C$.

Якщо матрицю $C = [C_1, C_2, \dots, C_{2k}]$ знайдено, то всі варіанти 2-факторів виду $F_t \cup F_{t+1}$ побудовано. *Крок*

5. Результат $G = \bigcup_{i=1}^{2s+3} F_i$ — регулярний гандикап-граф із заданими параметрами.

Теорема

35.

Сукупність

1-фактрів

$F_1, F_2, \dots, F_{2s+3}$

утворює

1-факторизацію $(2s + 3)$ -регулярного графу $G = (V, E)$.

Теорема

36.

Граф $G = \cup_{i=1}^{2s+3} F_i$ порядку $n = 8k \in (2s + 3)$ -регулярним гандикап графом з $w(i) = (8k + 1)(s + 1) + i$, де $i = 1, 2, \dots, 8k$ і множина підграфів $F_1, F_2, \dots, F_{2s+3}$ графу G є його 1-факторизацією.

Таблиця. Порівняльна характеристика схеми 2 та алгоритму 8.1 побудови r -регулярного гандикап графу порядку $n \equiv 0(\text{mod}8)$

Критерій	Схема 2	Алгоритм 8.1
Правило визначення ребер	Аналітична формула відстаней: $\rho(i, j) = \min(i - j , n - i - j)$	Процедурний пошук циклів через матрицю циклів C
Формування 2-факторів	Об'єднання пар 1-факторів з явно заданими ребрами	Формування набору циклів C_4 за умови унікальності вершин
Контроль властивостей розмітки	Властивість гандикапу закладається на етапі побудови	Властивість гандикапу перевіряється після заповнення матриці C
Обчислювальна складність	$\Theta(n)$ – обчислення за формулою не вимагає перебору	$\Theta(n^2)$ – вимагає порівняння циклів при заповненні матриці.
Метод побудови	Пряма побудова розкладу за явними формулами відстаней	Процедурна генерація розкладу за допомогою пошуку циклів

Антимагічні розмітки у дослідженні соціальної мережі

$G = (V, E)$ – звичайний граф, $\mathcal{E}$ – множину всіх 4-елементних підмножин множини вершин V , які в G породжують один з графів $2K_2$, C_4 або P_4 , тобто $\mathcal{E} = \{X \subseteq V(G): |X| = 4 \text{ і } G[X] \cong 2K_2 \text{ або } C_4, \text{ або } P_4\}$, де $G[X]$ – підграф графу G породжений множиною вершин X . Множину $\mathcal{E}$ називають A_4 -конфігурацією, а X – A_4 -гіперребром (або гіперребром).

Означення. Назвемо 1-Скелетом A_4 -структури графу G звичайний граф $F(G)$ з множинами вершин і ребер: $V(F(G)) = V(G)$ $E(F(G)) = \{(u, v): \exists X \in \mathcal{E} \text{ з } \{u, v\} \subseteq X\}$. Інакше кажучи, дві вершини u і v суміжні в 1-скелеті, якщо вони разом належать хоча б одній множині X із A_4 -конфігурації $\mathcal{E}$. Це поняття може бути узагальнено на довільну Φ -структуру графу G .

- Використання **1-скелета A_4 -структури** для аналізу локальних підграфів ($2K_2$, C_4 , P_4).
- Перехід від гіперграфа до звичайного графа $\rightarrow$ багатовимірна взаємодія.
- Ідентифікація **брокерських позицій**: вершини з високим ступенем у скелеті при низькому ступені у вихідному графі.
- Антимагічна розмітка $\rightarrow$ впорядкована шкала інтенсивності участі, усунення «нічийних» ситуацій у ранжуванні.

- Розглядається **підмережа професійних контактів навчального підрозділу**.
- Учасники: викладачі, аспіранти, студенти.
- Кожен має певну кількість безпосередніх взаємодій: • спільні курси, • проєкти, • семінари, • робочі групи.
- **Мета аналізу:**
 - перейти від опису лише прямих контактів до моделі **спільних контекстів участі**;
 - виявити учасників, які виконують **посередницькі функції** між групами;
 - визначити **нетипові профілі залученості**;
 - побудувати **однозначне впорядкування вершин**, коли стандартні показники не розрізняють їхніх позицій.

Математична модель мережі

Граф $G = (V, E)$, $|V| = 24$ – кількість учасників, $|E| = 32$ – кількість прямих контактів (рис.). Структура мережі:

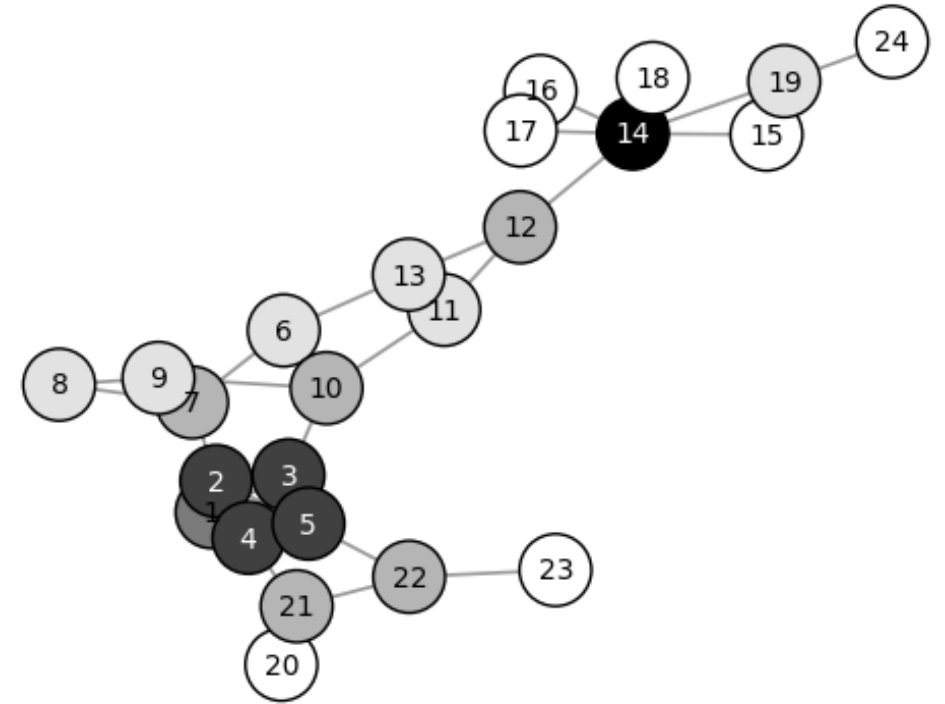
викладацьке ядро,
слабозв'язаний цикл із колег,
зіркоподібна підструктура з координатором і групою помічників,
лінійна ланка з чотирьох учасників.

Кількісна оцінка групової участі

•Виокремлюємо множину всіх **четвірок учасників**, у яких реалізується один із трьох шаблонів локальної взаємодії:

$2K_2$; C_4 ; P_4

•На основі цих четвірок утворюється **мережа спільних підструктур** $\rightarrow$ 1-скелет A_4 -структури



Початковий граф G мережі професійних контактів

Характеристики та індикатори

Для кожного учасника обчислюємо:

- $d_G(v)$ — кількість прямих контактів,
- $d_F(v)$ — кількість зв'язків у мережі спільних мотивів.

Похідні індикатори:

- **Брокерство**: надлишок групової залученості над локальною,
- **Аномальність**: співвідношення групової залученості до локальної (∞ для випадків без локальних контактів).

Якщо 1-скелет є майже повним графом $\rightarrow$ можливе введення **антимагічної розмітки** для ранжування вершин.

Практична реалізація моделі

- Використано **алгоритм 2.2** (Python, множина суміжності).
- Повний цикл обчислень:
 - формування вихідної мережі (рис.),
 - побудова 1-скелета (рис.),
 - отримання узагальнених характеристик: $d_G(v)$ — прямі контакти, $d_F(v)$ — зв'язки у спільних мотивах, $b(v)$ — брокерство, $r(v)$ — аномальність, $w(v)$ — вага (антимагічна розмітка).

Таблиця 8. Числові характеристики вершин графу $F(G)$

v	$d_G(v)$	$d_F(v)$	$b(v)$	$r(v)$	$w(v)$
20	1	23	20	21.00	2815
23	1	23	20	21.00	2741
24	1	23	20	21.00	2719
15	1	20	17	18.00	885
16	1	20	17	18.00	835
17	1	20	17	18.00	785
18	1	20	17	18.00	735
6	2	23	19	10.50	3893
8	2	23	19	10.50	3537
9	2	23	19	10.50	3393
11	2	23	19	10.50	3163
13	2	23	19	10.50	2997
19	2	23	19	10.50	2849
7	3	23	18	7.00	3703
10	3	23	18	7.00	3269
12	3	23	18	7.00	3073
21	3	23	18	7.00	2787
22	3	23	18	7.00	2763
1	4	23	17	5.25	5273
2	5	23	16	4.20	4933
3	5	23	16	4.20	4627
4	5	23	16	4.20	4353
5	5	23	16	4.20	4109
14	6	23	15	3.50	2933

Числові характеристики (таблиця)

- Вершини 20, 23, 24: $d_G(v) = 1$; $d_F(v) = 23$; $b(v) = 20$; $r(v) = 21$, $w(v)$: 2700 – 2800.
- Вершина 1: $d_G(v) = 4$; $d_F(v) = 23$; $b(v) = 17$; $r(v) = 5.25$, $w(v) = 5273$.
- Вершина 18: $d_G(v) = 1$; $d_F(v) = 20$; $b(v) = 17$; $r(v) = 18$, $w(v) = 735$.
- Діапазон ваг: 735 – 5273.
- Дані таблиці показують різні профілі: брокери, ядро, периферійні посередники.

– $d_G(v)$ — прямі контакти, – $d_F(v)$ — зв'язки у спільних мотивах, – $b(v)$ — брокерство, – $r(v)$ — аномальність, – $w(v)$ — вага (антимагічна розмітка).

Результати аналізу

Вихідна мережа: 32 прямі зв'язки між 24 особами → фрагментована структура.

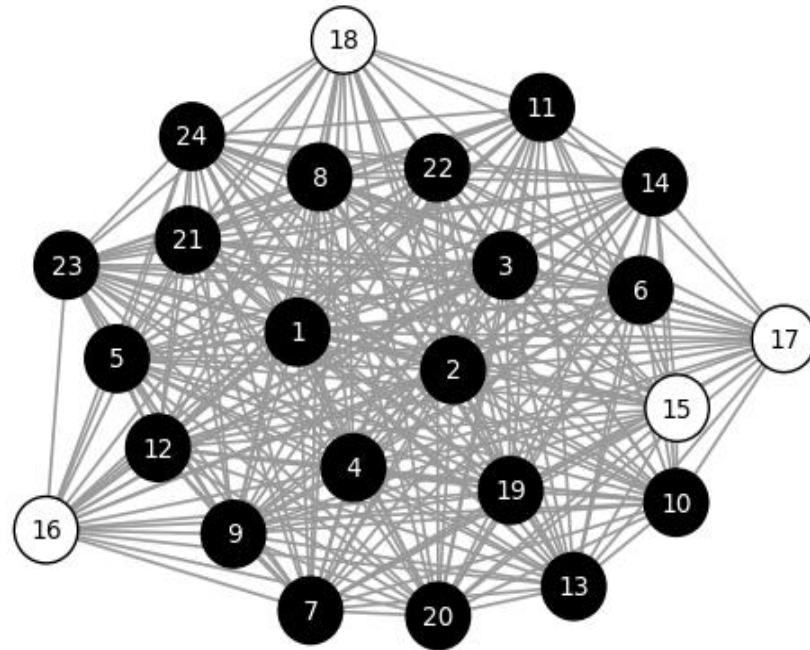
1-скелет: **374 контексти спільної участі**, майже повний граф (270 із 276 ребер).

Зростання ступенів: від 1–4 до 20–23 → масова групова включеність.

Виявлені ролі:

- **Брокери** (20, 23, 24) — мінімальні контакти, але максимальна інтеграція.
- **Ядро** (1) — надлишок групової участі.
- **Аномальні профілі** (18) — низька локальна активність, висока групова включеність.

Антимагічна розмітка забезпечує однозначне ранжування та виявлення маніпулятивної поведінки.



Граф $F(G)$ – 1-скелет мережі спільних контактів

Джерела:

1. Froncek D., Kovar P., Kovarova T. Fair incomplete tournaments. Bulletin Inst. Combin. Appl.. 2006. Vol. 48. P. 31–33.
2. Froncek D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics. 2013. Vol. 10, No. 2. P. 119–127. DOI:10.1080/09728600.2013.12088729
3. Semeniuta M., Sherman Z., Dmitriiev O., Soroka M. Magic type labeling of graphs in linear ordering problem. CEUR Workshop Proceedings. 2021. Vol. 3106. P. 194–201.
4. Semeniuta M. F., Sherman Z. O. On New Properties of Graphs with Magic Type Labeling. Control systems and machines. 2019. № 3. C. 15–22. <https://doi.org/10.15407/csc.2019.03>
5. Prasanna N. L., Jyothi P. J. Load Balancing Strategies in CLOUD an Application of Magic Labeling. Second International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS). 2018. P. 1659-1664. DOI:10.1109/ICCONS.2018.8663105
6. Randles M., Lamb D., Taleb-Bendiab A. A Comparative Study into Distributed Load Balancing Algorithms for Cloud Computing. IEEE 24th International Conference on Advanced Information Networking and Applications Workshops. 2010. P. 551–556. DOI: [10.1109/WAINA.2010.85](https://doi.org/10.1109/WAINA.2010.85)
7. Meenakshi A., Kannan A., Cep R., Elangovan M. Efficient Graph Network Using Total Magic Labeling and Its Applications. Mathematics. –2023. Vol. 11, № 19. P. 1-21 <https://doi.org/10.3390/math11194132>
8. Mishra S. K., Sahoo B., Parida P. P. Load balancing in cloud computing: A big picture. Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences. 2020. Vol. 32, No. 2. P. 149–158.
9. Hulianytskyi L., Semeniuta M., Yakymenko S. Methods of decomposition theory and graph labeling in the study of social network structure. CEUR Workshop Proceedings. –2024. –Vol. 3909. – P. 490–499.
10. Sethukkarasi A., Vidyanandini M. Local antimagic labeling of cycle-related graphs for communication channel optimization in wireless sensor networks. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms. 2024. Vol.31. P. 419-429.
11. Bhatnagar K., Singh S. Some applications of antimagic graphs in cryptology. The Mathematics Education. 2024.

Джерела:

12. Yadav A., Minirani S. Encryption of data using distance antimagic labeling. IAENG International Journal of Computer Science. 2025. – T. 52, № 7. – P. 2248–2255.
13. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling. Electronic Journal of Combinatorics. 2024. 712 p.
<https://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds6/ds6v27-2024.pdf>
14. Tuza Z. Graph labeling games. Surveys in Combinatorics. Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2017. Vol. 60. P. 61–68.
15. Boudreau E., Hartnell B., Schmeisser K., Whiteley J. A game based on vertex-magic total labelings. Australasian Journal of Combinatorics. 2004. Vol. 29. P. 67–73.
16. de Oliveira D. L., Artigas D., Dantas S., Luiz A. Bounds on the Edge-Sum Distinguishing Game. Matemática Contemporânea.*. 2023. Vol. 55. P. 67-76. DOI: 10.21711/231766362023/rmc558
17. Sedlacek J. Problem 27, “Theory of graphs and its applications”. *Proc. Symposium, Smolenice*, 1963, Nakl. CSAV, Praha. 1964. P. 163-164.
18. Colbourn C. J., Dinitz J. H. Handbook of Combinatorial Designs. 2nd ed. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC. 2007.
19. Anderson I. Combinatorial Designs and Tournaments. Oxford : Oxford University Press. 1997.
20. Semeniuta M. F. Combinatorial Configurations in the Definition of Antimagic Labelings of Graphs. Cybernetics and Systems Analysis. 2021. Vol. 57. No. 2. P. 196–204.
21. Hartsfield N., Ringel G. Pearls in Graph Theory. Boston : Academic Press. 1990. 259 p.
22. Miller M., Rodger C., Simanjuntak R. Distance magic labelings of graphs. Australasian Journal of Combinatorics. 2003. Vol.28. P. 305–315.
23. Vilfred V. Sigma labelled graphs and circulant graphs : PhD Thesis. University of Kerala, 1994.
24. Sugeng K., Froncek D., Miller M., Ryan J., Walker J. On distance magic labeling of graphs. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing. 2009. Vol. 71. P. 39–48.
25. . O’Neal A., Slater P. Vertex distance magic labelings of graphs . Congressus Numerantium. 2010. Vol. 204. P. 61–70.

Джерела:

26. Arumugam S., Kamatchi N. On (a,d) -distance antimagic graphs. Australasian Journal of Combinatorics. 2012. Vol. 54. P. 279–287.
27. Froncek D. Group distance magic labeling of Cartesian product of cycles // Australasian Journal of Combinatorics. 2013. Vol. 55. P. 167–174.
28. Cichacz S., Froncek D., Sugeng K., Zhou S. Group distance magic and antimagic graphs // Journal of Combinatorial Optimization. 2016. Vol. 32. P. 1150–1160.
29. Semeniuta M. Balanced Zero-Neighborhood Labeling of Generalized Petersen Graphs. Cybernetics and Systems Analysis. 2025. Vol. 61, No. 6. P. 934–942. DOI: 10.1007/s10559-025-00826-3
30. Семенюта М.Ф. (a, d) -дистанційна антимагічна розмітка окремих типів графів. Кібернетика і системний аналіз. 2016. Т. 52, №6. С. 135-142.
31. Semeniuta M. F. Combinatorial configurations in the definition of antimagic labelings of graphs. Cybernetics and Systems Analysis. 2021. Vol. 57. – P. 196–204. DOI: [10.1007/s10559-021-00344-y](https://doi.org/10.1007/s10559-021-00344-y)
32. Semeniuta M. F. On (a,d) -distance anti-magic and 1-vertex bimagic vertex labelings of certain types of graphs. Cybernetics and Systems Analysis. 2018. Vol. 54. P. 295–301. DOI: 10.1007/s10559-018-0031-2
33. Semeniuta M. F., Donets G. A. Group labeling of some graphs. Cybernetics and Systems Analysis. 2020. Vol. 56,. P. 701–709. DOI: 10.1007/s10559-020-00287-w.

Дякую за увагу!