НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ КІБЕРНЕТИКИ ІМЕНІ В.М. ГЛУШКОВА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Годлюк Віктор Васильович

УДК 519.8

ДИСЕРТАЦІЯ

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОБОТИ ЦИФРОВИХ ПЛАТФОРМ

113 – «Прикладна математика»

Галузь знань 11 – «Математика та статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

В. В. Годлюк

Науковий керівник: **Горбачук Василь Михайлович**

д.ф-м.н., професор

Київ – 2026

АНОТАЦІЯ

Годлюк В.В. Математичні моделі та методи роботи цифрових платформ. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 Прикладна математика. Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова Національної академії наук України, Київ. 2026.

Дисертаційна робота складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. У вступі обґрунтовано актуальність теми, проаналізовано ступінь її наукової розробленості, сформульовано мету та завдання дослідження, визначено об'єкт і предмет, описано застосовані методи, наукову новизну, теоретичне та практичне значення, апробацію результатів та загальну структуру роботи.

Перший розділ присвячено аналізу цифрових платформ як об'єктів математичного моделювання. У ньому подано класифікацію платформ, описано основні процеси їхнього функціонування, зокрема взаємодію учасників, мережеві ефекти, ціноутворення та матчинг, а також проаналізовано існуючі підходи до моделювання: економічні, ігрові, мережеві та оптимізаційні. Особливу увагу приділено обмеженням економічних та ігрових моделей у контексті задач оптимізації в реальному часі. На основі цього аналізу сформульовано наукову проблему, яку вирішує дисертація.

У другому розділі запропоновано математичні моделі функціонування цифрових платформ. Зокрема, розроблено мережеву модель у вигляді динамічного дводольного графа з урахуванням активності учасників, часових характеристик, геолокації та репутаційних оцінок, що узагальнює класичні підходи до моделювання взаємодії. Також представлена динамічна модель залучення учасників на основі марківських ланцюгів та систем диференціальних рівнянь із зворотним зв'язком, яка враховує вплив прямих і непрямих мережевих ефектів. Окремо розглянуто модель матчингу попиту та пропозиції з

обмеженнями, а також проведено аналіз властивостей запропонованих моделей щодо існування розв'язку, стійкості та масштабованості.

Третій розділ присвячено методам аналізу та оптимізації роботи цифрових платформ. У ньому формалізовано задачу багатокритеріального матчингу як задачу дискретної оптимізації, описано застосування методів лінійного, нелінійного та стохастичного програмування, запропоновано алгоритми матчингу на основі теорії графів, а також представлено результати чисельних експериментів.

У висновках узагальнено наукові результати, надано відповіді на поставлені завдання, сформульовано практичні рекомендації для розробників та операторів цифрових платформ, а також визначено напрямки подальших досліджень. Додатки містять алгоритмічну базу та схеми реалізації методів адаптивного матчингу, протоколи обчислювальних експериментів, таблиці чисельних результатів.

Ключові слова: цифрові платформи, двобічні ринки, мережеві ефекти, матчинг, дискретна оптимізація, теорія графів, стохастичне програмування, робастність, резильєнтність, багатокритеріальна оптимізація.

ABSTRACT

Godlyuk V.V. Mathematical models and methods of digital platforms. Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 113 Applied Mathematics. V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv. 2026.

The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusions, a list of sources used and appendices. The introduction substantiates the relevance of the topic, analyzes the degree of its scientific development, formulates the goal and objectives of the research, defines the object and subject, describes the applied methods, scientific novelty, theoretical and practical significance, testing of the results and the general structure of the work.

The first chapter is devoted to the analysis of digital platforms as objects of mathematical modeling. It presents a classification of platforms, describes the main processes of their functioning, in particular the interaction of participants, network effects, pricing and matching, and also analyzes existing approaches to modeling: economic, game, network and optimization. Particular attention is paid to the limitations of economic and game models in the context of real-time optimization problems. Based on this analysis, the scientific problem solved by the dissertation is formulated.

The second chapter proposes mathematical models of the functioning of digital platforms. In particular, a network model in the form of a dynamic bipartite graph was developed, taking into account the activity of participants, time characteristics, geolocation and reputation estimates, which generalizes classical approaches to modeling interaction. A dynamic model of participant involvement based on Markov chains and systems of differential equations with feedback is also presented, which takes into account the influence of direct and indirect network effects. A model of supply and demand matching with constraints is separately considered, and the

properties of the proposed models regarding the existence of a solution, stability and scalability are also analyzed.

The third section is devoted to methods for analyzing and optimizing the operation of digital platforms. It formalizes the multi-criteria matching problem as a discrete optimization problem, describes the application of linear, nonlinear and stochastic programming methods, proposes matching algorithms based on graph theory, and presents the results of numerical experiments.

The conclusions summarize the scientific results, provide answers to the tasks, formulate practical recommendations for developers and operators of digital platforms, and identify areas for further research. The appendices contain the algorithmic framework and implementation schemes of adaptive matching methods, computational experiment protocols, and tables of numerical results.

Keywords: digital platforms, two-sided markets, network effects, matching, discrete optimization, graph theory, stochastic programming, robustness, resilience, multi-criteria optimization.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

DBSCAN – Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise (алгоритм просторової кластеризації, заснований на щільності точок із присутністю шуму).

Gini – коефіцієнт (індекс) Джині (статистичний показник ступеня розшарування або нерівномірності розподілу, у роботі – завантаженості ресурсів).

NP – Non-deterministic Polynomial time (клас складності задач, для яких перевірка розв'язку може бути здійснена за поліноміальний час).

MIP – Mixed Integer Programming (змішане цілочисельне програмування –

метод оптимізації, де деякі змінні мають набувати цілочисельних значень).

PPAD – Polynomial Parity Arguments on Directed graphs (клас складності задач, до якого належить пошук точок рівноваги, зокрема рівноваги Неша).

SAA – Sample Average Approximation (метод апроксимації середнім за вибіркою, що використовується для розв'язання задач стохастичної оптимізації).

SimPy – бібліотека мови програмування Python для дискретно-подієвого моделювання.

SQP – Sequential Quadratic Programming (метод послідовного квадратичного програмування – ітеративний алгоритм оптимізації для розв'язання задач нелінійного програмування з обмеженнями, що ґрунтується на послідовній апроксимації цільової функції квадратичною формою, а обмежень – лінійними рівняннями).

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасна економіка переживає глибоку цифрову трансформацію, у центрі якої перебувають цифрові платформи – інформаційно-координаційні екосистеми, що забезпечують взаємодію між різними гетерогенними групами користувачів: споживачами та постачальниками товарів, послуг, знань або ресурсів [1–4]. За оцінками Організації економічного співробітництва та розвитку, бізнес-моделі, що основані на цифрових платформах вже генерують понад 20% глобального інтернет-ринку, а їхній вплив на ринок праці, логістику, фінансові потоки та освітні сервіси продовжує стрімко зростати. Особливе значення набувають двобічні платформи послуг, такі як транспортні агрегатори, фріланс-біржі та сервіси тимчасового житла, які ефективно координують попит і пропозицію в реальному часі [5–7]. У дослідженнях Світового банку підкреслюється, що саме такі екосистеми стають ключовим драйвером інклюзивного економічного зростання, особливо в умовах розвитку цифрової інфраструктури в країнах зі змінною економікою.

Український ринок активно інтегрується в цей глобальний тренд. Згідно з аналітичним звітом «Digital Economy Outlook Ukraine 2024» [8], кількість користувачів цифрових платформ у країні зросла майже на 40 % за останні три роки, а сектор платформних послуг став одним із найшвидше зростаючих у національній IT-екосистемі, що підтверджується емпіричними даними цифрової трансформації за період 2019–2024 років [9]. Однак, незважаючи на стрімке технологічне розширення, ефективність функціонування таких систем часто обмежена через високу динамічність процесів, складність прогнозування попиту в реальному часі та необхідність оптимального розподілу обмежених ресурсів між учасниками [11, 12]. Більшість існуючих систем управління не повною мірою враховують мережеві ефекти та імовірнісну природу взаємодії користувачів, що призводить до операційних простоїв, дефіциту послуг або неефективного навантаження на провайдерів [13, 14]. Як зазначається в сучасних дослідженнях системного моделювання, подібні виклики вимагають переходу від детермінованих підходів до методів, що поєднують аналіз реальних даних, машинне навчання та прогнозування в умовах неповної інформації й стохастичної динаміки ринку [14].

Задачі динамічного матчингу (парування) та стратегічного управління ресурсами вимагають залучення сучасного математичного апарату теорії графів [15, 16], системного аналізу в поєднанні з інструментами штучного інтелекту для формалізації нелінійних взаємозалежностей у цифрових екосистемах [17] та методів стохастичної оптимізації [18, 19]. Розробка нових математичних моделей і методів, здатних адекватно описувати динаміку платформ та забезпечувати обґрунтовану оптимізацію їхньої роботи, є актуальним науково-прикладним завданням, що має суттєве значення для розвитку цифрової економіки України [20]. У цьому контексті виникає нагальна потреба в інтеграції структурного, динамічного та оптимізаційного рівнів аналізу, оскільки традиційні підходи часто розглядають ці аспекти ізольовано.

Особливо гостро постає проблема формалізації стратегічної взаємодії учасників в умовах конфлікту інтересів та невизначеності вхідних даних, що вимагає застосування сучасних методів диференціальних ігор та нечіткої логіки для аналізу стійкості ієрархічних мережевих структур. Паралельно зростає потреба в алгоритмах координації багатосторонніх учасників, які дозволяють формалізувати процеси матчингу, ціноутворення та розподілу ресурсів за умов динамічної зміни попиту та пропозиці. Крім того, практична реалізація платформних рішень вимагає математичного апарату для розв'язання дворівневих задач розподілу ресурсів з обмеженнями на пропускну здатність проміжних вузлів та двосторонніми обмеженнями на попит, що забезпечує умови сумісності системи в реальному часі.

Таким чином, дослідження математичних моделей та методів роботи цифрових платформ є науково та практично актуальним завданням, що відповідає сучасним викликам цифрової економіки. Поєднання теоретичної строгості прикладної математики з практичною цінністю розроблених інструментів не лише сприяє підвищенню ефективності та стійкості цифрових екосистем, а й зміцнює технологічний суверенітет України в умовах глобальної трансформації ринків послуг.

Ступінь наукової розробленості проблеми. Проблематика цифрових платформ активно досліджується протягом останніх двох десятиліть, проте підходи до їхнього аналізу суттєво різняться залежно від наукової дисципліни.

В економічній теорії фундаментальні засади двобічних ринків було закладено у працях Ж.-Ш. Роше та Ж. Тіроля, які запропонували модель ціноутворення з урахуванням мережевих ефектів. Подальші дослідження М. Армстронга, Д. Еванса розширили цей підхід на стратегічну взаємодію платформ, інновації та регулювання. В українському сегменті економічні аспекти платформ та їхній вплив на ринок аналізують В. М. Горбачук, а динаміка цифрової трансформації та стрімке зростання сектору платформних послуг детально відображені в емпіричних дослідженнях останніх років, що підтверджують активну інтеграцію національної ІТ-екосистеми у глобальні тренди [9]. Проте ці моделі носять переважно макроекономічний характер і не враховують мікрорівневої динаміки взаємодії учасників у реальному часі.

У комп’ютерних науках та інженерії основна увага приділяється алгоритмам матчингу та масштабованості платформ. Роботи Д. Ізлі та Дж. Кляйнберга, а також фундаментальні дослідження з теорії графів та мереж Т. Кормена і М. Ньюмана, демонструють ефективність алгоритмічних підходів. Однак такі рішення часто є емпіричними, оптимізованими під конкретні бізнес-моделі, і не завжди мають строге математичне обґрунтування щодо стійкості чи робастності, які досліджуються у сучасних працях, присвячених координації багатосторонніх учасників, адаптації алгоритмів до динамічних умов та формалізації процесів розподілу ресурсів у реальному часі.

У прикладній математиці окремі елементи платформ моделюються за допомогою теорії графів [21, 22], системного аналізу в поєднанні з методами штучного інтелекту для формалізації нелінійних взаємозалежностей у цифрових екосистемах [17, 23] або методів оптимізації [19, 24]. Зокрема, задачі розподілу ресурсів часто формуються як задачі лінійного та стохастичного програмування

[18, 25]. Проте комплексна математична модель, що одночасно враховує структуру взаємодії, динаміку залучення учасників [11] та стратегічну взаємодію в умовах конфлікту інтересів і нечіткої інформації [26], залишається недостатньо розробленою.

Особливо мало робіт присвячено аналізу стійкості платформ до флуктуацій попиту та балансуванню навантаження в умовах неповної інформації – завданням, що потребують методів негладкої оптимізації [27], системного прогнозування на основі реальних даних з урахуванням стохастичної динаміки ринку [14] та дворівневих моделей розподілу ресурсів з обмеженнями на пропускну здатність проміжних вузлів. Більшість існуючих підходів не інтегрують мережевий аналіз, динамічне моделювання та дискретну оптимізацію в єдину методологічну рамку [20].

Таким чином, незважаючи на значний обсяг публікацій, проблема побудови цілісних математичних моделей функціонування цифрових платформ та розробки на їхній основі обґрунтованих методів оптимізації залишається недостатньо вирішеною, що й визначає наукову новизну даного дослідження.

Мета та завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є теоретичне обґрунтування та розробка цілісного математичного інструментарію – сукупності моделей, методів та алгоритмів – спрямованого на підвищення ефективності функціонування цифрових платформ послуг. Основний акцент зроблено на оптимізації процесів динамічного матчингу та впровадженні стратегічного управління ресурсами в умовах високої невизначеності та волатильності ринкового середовища [11, 12].

Для досягнення поставленої мети було послідовно реалізовано низку наукових завдань. На початковому етапі проведено всебічний аналіз сучасних тенденцій розвитку глобальних та вітчизняних цифрових платформ, що дало змогу виявити критичні математичні проблеми їхнього функціонування. Використання методології системного аналізу дозволило формалізувати ці проблеми як задачі управління в складних ієрархічних структурах, враховуючи специфіку цифрової трансформації економіки [9].

Наступним кроком стала розробка та обґрунтування концептуальної математичної моделі цифрової платформи, яка розглядається як складна динамічна система. У моделі враховано нелінійні мережеві ефекти та багаторівневий характер взаємодії між різними групами користувачів, що є характерним для сучасних двобічних ринків [7, 10]. На основі цієї моделі було запропоновано метод динамічного матчингу, що базується на апараті теорії графів та потоків у мережах. Даний метод орієнтований на мінімізацію сумарного часу очікування в системі та забезпечення максимальної відповідності між запитами споживачів та можливостями постачальників послуг [15, 16, 21].

Подальша частина дослідження була присвячена вирішенню задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів платформи. Для цього було сформульовано математичну постановку задачі оптимізації, розв'язання якої здійснювалося із застосуванням методів негладкої оптимізації та робастного підходу. Це дозволило забезпечити стійкість управлінських рішень до різких флуктуацій попиту та пропозиції [19, 27, 28]. Водночас для підвищення прогностичних властивостей системи було розроблено математичні моделі поведінки користувачів. Використання методів аналізу часових рядів та імовірнісного моделювання дозволило значно підвищити точність оперативного планування ресурсами в реальному часі [23, 29].

Фінальним етапом роботи стала алгоритмічна реалізація запропонованих моделей та методів і проведення серії обчислювальних експериментів. Чисельна верифікація розроблених алгоритмів підтвердила їхню теоретичну коректність та практичну ефективність. Зокрема, було продемонстровано можливості застосування отриманого математичного інструментарію для розв'язання прикладних задач оптимізації та адаптивного управління в контексті сталого розвитку, енергоефективності та побудови стійких цифровізованих екосистем [20, 30].

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених у дисертації завдань було застосовано комплексний методологічний підхід, що базується на поєднанні фундаментальних методів прикладної математики та системного аналізу. Теоретичне структурування об'єкта дослідження та ідентифікація зв'язків у межах цифрових платформ здійснювалися на засадах системного аналізу складних систем застосовуючи сучасну методологію системного аналізу в поєднанні з інструментами штучного інтелекту та аналізу даних, що дозволяє формалізувати складні взаємодії в цифрових екосистемах [17]. Побудова структурно-функціональних моделей взаємодії учасників та реалізація процесів матчингу базувалися на використанні теорії графів, методів комбінаторної оптимізації та теорії мережевих потоків [15, 21, 22].

Аналіз стратегічної поведінки користувачів та формалізація механізмів прийняття рішень на платформі проводилися з використанням апарату теорії ігор, що дозволило врахувати конфліктні та кооперативні інтереси сторін [26, 31, 32]. Для розв'язання задач оптимального розподілу ресурсів було залучено методи математичного програмування, зокрема сучасні алгоритми негладкої та опуклої оптимізації, що забезпечують збіжність у задачах великої розмірності [19, 24, 27].

Прогнозування динаміки завантаження платформи та оцінка ризиків здійснювалися за допомогою методів математичної статистики, теорії імовірностей та аналізу часових рядів, що дало змогу врахувати стохастичну природу процесів [14, 18]. Перевірка наукових гіпотез та оцінка адекватності моделей виконувалися шляхом комп'ютерного моделювання, обчислювальних експериментів та алгоритмічної реалізації розроблених математичних процедур [33, 34].

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження є двобічні цифрові платформи послуг – інформаційно-комунікаційні системи, що забезпечують координацію взаємодії між двома гетерогенними групами учасників: споживачами, які формулюють запити на послуги, та постачальниками, які їх надають. До цього класу належать такі платформи, як Uber, Bolt, Airbnb або Upwork, а також численні локальні сервіси, що працюють у сфері транспорту, фрілансу, побутових послуг тощо [35, 36]. Основна функція таких систем полягає в оперативному матчингу попиту та пропозиції за умов обмежених ресурсів, часу та неповноти інформації [5, 37].

Особливістю цих платформ є наявність прямих і непрямих мережевих ефектів, висока динамічність потоків запитів і пропозицій, а також необхідність прийняття рішень у реальному часі за складних умов взаємодії [6, 7, 31, 38].

Предметом дослідження виступають математичні моделі та методи, спрямовані на формалізацію та оптимізацію процесів, що лежать в основі функціонування зазначених платформ. Зокрема, розглядаються мережеві моделі у вигляді динамічних дводольних графів, які адекватно відображають структуру взаємодії між учасниками з урахуванням їхньої активності, географічного розташування, репутаційних характеристик та часових обмежень [21, 22, 39]. Також досліджуються динамічні системи, побудовані на основі марківських ланцюгів або систем диференціальних рівнянь із зворотним зв'язком, що описують процеси залучення, утримання та відтоку учасників під впливом мережевих ефектів [40, 41].

Особливу увагу приділено формалізації задачі матчингу як багатокритеріальної задачі дискретної оптимізації, метою якої є одночасне досягнення мінімізації часу очікування, балансування навантаження провайдерів та максимізації загального рівня задоволеності користувачів [28, 42]. Для розв'язання цих задач застосовуються методи теорії графів, лінійного та нелінійного програмування, а також евристичні та стохастичні підходи, що дозволяють оцінити ефективність, стійкість і масштабованість запропонованих рішень [24, 43].

Таким чином, дослідження зосереджено не на бізнес-моделях або організаційних аспектах платформ, а виключно на їхній математичній сутності як складних динамічних систем, що підлягають строгому формальному аналізу та оптимізації в рамках прикладної математики [17, 29]. Цей підхід узгоджується з сучасними тенденціями моделювання цифрових екосистем, де ключову роль відіграють інтеграція структурного, динамічного та оптимізаційного рівнів аналізу [44].

Методи дослідження. У дисертаційній роботі застосовано комплекс методів прикладної математики, що дозволяє забезпечити строгу формалізацію, аналіз і оптимізацію процесів функціонування цифрових платформ. Основу дослідження становить метод математичного моделювання, за допомогою якого реальні процеси взаємодії учасників платформи перетворюються на формальні об'єкти – графи, динамічні системи, оптимізаційні задачі [17, 31].

Для опису структури взаємодії використано апарат теорії складних мереж [16], зокрема модель динамічного дводольного графа, що дозволяє враховувати часову еволюцію зв'язків, ваги ребер та обмеження на активність вершин [21, 22]. Такий підхід узгоджується з сучасними уявленнями про платформи як мережеві екосистеми [44] і дає змогу формалізувати просторово-часові обмеження, характерні для реальних сервісів.

Динаміка залучення та утримання учасників аналізується за допомогою методів теорії марківських процесів [39] та систем диференціальних рівнянь із зворотним зв'язком [41], що дає змогу моделювати вплив прямих і непрямих мережевих ефектів на стійкість системи [40]. Особливу увагу приділено врахуванню часових затримок у реакції користувачів та аналізу стійкості стаціонарних станів, що істотно покращує прогностичну здатність моделі [26].

Для розв'язання задачі матчингу попиту та пропозиції застосовано методи дискретної оптимізації, зокрема підходи лінійного та нелінійного програмування [19, 24], а також алгоритми теорії графів [15], адаптовані до багатокритеріальних умов [23, 42]. У разі, коли точні методи є обчислювально надто витратними, використано евристичні та метаевристичні підходи [45], ефективність яких оцінюється шляхом порівняльного аналізу з оптимальними розв'язками на тестових прикладах [28].

Верифікація запропонованих моделей і методів здійснюється за допомогою чисельних експериментів та симуляційного моделювання, зокрема на основі агентного підходу та дискретно-подієвого моделювання [46], що дозволяє відтворити реалістичну динаміку платформи за різних сценаріїв завантаження. Для оцінки стійкості та масштабованості розроблених алгоритмів за умов невизначеності застосовано методи стохастичного програмування [18, 47, 48], аналізу обчислювальної складності [15] та системної статистичної обробки результатів експериментів [14, 29].

Такий інтегрований підхід, що поєднує теорію складних мереж, динамічне моделювання та методи оптимізації, забезпечує не лише теоретичну обґрунтованість отриманих результатів, а й їхню практичну придатність для застосування в реальних цифрових системах [11, 20], зокрема в умовах обмежених ресурсів та специфіки логістичних процесів [10], що характерні для сучасного цифрового ринку [8, 37].

Наукова новизна. Наукова новизна одержаних результатів полягає у розробці та теоретичному обґрунтуванні комплексу математичних моделей і методів, що дозволяють формалізувати та оптимізувати процеси функціонування сучасних цифрових платформ послуг у динамічних ринкових умовах. Вперше запропоновано мережеву модель цифрової платформи, представлену у вигляді динамічного зваженого дводольного графа, що дозволяє інтегрувати просторово-часові характеристики запитів та репутаційні профілі учасників у єдиний процес прийняття рішень. На основі систем диференціальних рівнянь із зворотним зв’язком В. В. Годлюком удосконалено модель динаміки залучення учасників, у якій вперше формалізовано вплив нелінійних мережевих ефектів на структурну стабільність платформи в умовах волатильності попиту. В ході дослідження математично доведено, що застосування мінімаксного критерію при розподілі навантаження забезпечує не лише мінімізацію показника нерівності розподілу доходів, але й гарантує стійкість системи до критичного відтоку постачальників послуг у пікові періоди. Наукову новизну також становить розроблений автором гібридний адаптивний алгоритм матчингу, що поєднує методи декомпозиції графів та локального пошуку аугментуючих шляхів. Подальшого розвитку набула методологія багатокритеріальної оптимізації двобічних ринків через впровадження стохастичних обмежень на доступність ресурсів, що дозволило підвищити точність прогнозування ключових показників ефективності платформи до рівня 97% порівняно з існуючими детермінованими аналогами.

Теоретичне та практичне значення. Теоретичне значення дисертаційного дослідження полягає в розширенні апарату прикладної математики шляхом розробки нових моделей і методів, спрямованих на аналіз складних динамічних систем, якими є сучасні цифрові платформи [17, 29]. Запропонований інтегрований підхід, що поєднує теорію складних мереж [16, 22], динамічне моделювання [26, 41] та багатокритеріальну оптимізацію [23, 42], створює основу для подальшого розвитку математичної теорії платформ як класу інформаційно-координаційних систем.

Результати роботи уточнюють існуючі уявлення про роль мережевих ефектів у стійкості таких систем – зокрема, розвиваючи моделі Ж.-Ш. Роше, Ж. Тіроля та М. Армстронга через врахування якості та структури зв'язків, а не лише кількості учасників, що узгоджується з сучасними підходами до моделювання ретардації в мережах [40]. Також формалізовано поняття ефективності матчингу в умовах обмежених ресурсів і неповної інформації, що розширює рамки класичних задач призначення [15, 21] і відповідає сучасним вимогам до справедливості та робастності систем [28, 30]. Крім того, робота розширює можливості застосування методів дискретної оптимізації до задач реального часу, пропонуючи гібридні стратегії, які поєднують точність лінійного та опуклого програмування [19, 24] із ефективністю спеціалізованих евристик [43]. Це сприяє формуванню нових напрямків досліджень на стику прикладної математики та цифрової економії [44].

Практичне значення отриманих результатів визначається їхньою придатністю до застосування в реальних цифрових сервісах. Розроблені моделі та алгоритми можуть бути використані розробниками платформ для підвищення ефективності матчингу, зменшення часу очікування користувачів та балансування навантаження [11]. Запропоновані підходи можуть бути адаптовані для локальних платформ – зокрема, у сфері транспорту, логістики та фрілансу, що критично важливо для розвитку цифрової інфраструктури [8, 37].

Методика симуляційного моделювання, розроблена в дисертації на основі агентного та дискретно-подієвого підходів [46], у поєднанні з методами стохастичного програмування [18, 48], може слугувати інструментом для тестування стратегій управління платформами, що знижує ризики та операційні витрати [14]. Зокрема, модель динамічного матчингу може бути інтегрована в існуючі системи або використана для побудови нових сервісів у специфічних галузях, таких як транспортні коридори [10] чи управління інформаційними потоками [20]. Таким чином, робота має як наукову, так і прикладну цінність, забезпечуючи математичний фундамент для технологічного прогресу в галузі цифрових платформ.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України в межах пріоритетних наукових досліджень, спрямованих на розробку високоефективних математичних методів і програмних засобів для функціонування сучасних цифрових інфраструктур. Основні результати дослідження безпосередньо пов'язані з виконанням низки науково-дослідних робіт (НДР) установи. Зокрема, у межах НДР ВК 145.47.25 «Технологічний розвиток та підтримка роботи Архіву препринтів і Головного порталу відкритої науки України» (державний реєстраційний номер 0122U002410) автором було досліджено архітектурні особливості цифрових платформ як складних екосистем та розроблено формалізований опис механізмів обміну інформацією, що лягло в основу концептуальної моделі, представленої у першому розділі дисертації.

Теоретичні підходи до управління ресурсами платформ в умовах мінливого попиту були сформульовані під час участі автора у виконанні НДР ВФ.115.41 «Розробити методи трансформації документоорієнтованих інформаційних систем в хмарні сервіси» (2018–2022, державний реєстраційний номер 0118U003153), де було запропоновано математичні моделі переходу від статичних структур до динамічних хмарних сервісів. У межах теми автором розроблено математичні моделі переходу від статичних інформаційних структур до динамічних хмарних сервісів. Ці результати дозволили сформулювати підходи до управління ресурсами платформ в умовах мінливого попиту, що відображено у другому розділі роботи.

Подальший розвиток методів динамічного матчингу та алгоритмів оптимізації розподілу запитів здійснювався в межах НДР ВФ.115.48 «Розробити математичні моделі архітектури цифровізованих інфраструктурних реєстрів у хмарному середовищі» (2023–2027, державний реєстраційний номер 0123U100813). У межах цієї НДР автором розроблено методи динамічного матчингу та алгоритми оптимізації розподілу запитів у хмарному середовищі. Результати впроваджено при створенні математичного інструментарію аналізу ефективності цифрових платформ, що становить основу третього розділу дисертації.

Апробація результатів. Результати дисертаційного дослідження були неодноразово апробовані на наукових форумах національного та міжнародного рівня, що підтверджує їхню наукову достовірність, актуальність і відповідність сучасним викликам цифрової економіки. Основні положення роботи доповідалися на міжнародній конференції Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2025) у Бельсько-Бялій (Польща), на 3rd Workshop on Reliability Engineering and Computational Intelligence (RECI 2024) у Жиліні (Словаччина), а також на міжнародному семінарі «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування», присвяченому пам’яті професора Г. П. Донця.

Значна частина результатів була представлена на провідних наукових конференціях України, зокрема «Резильєнтність динамічних систем» (Київ, 2024, 2025); VI-і читання А.В. Свідзинського (Луцьк, 2025); «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (Дніпро, 2023, 2024); «Інноваційні ідеї в економічній науці» (Київ, 2022–2025); «Глушковські читання» (Київ, 2023); «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування» (Кропивницький–Запоріжжя–Київ, 2024); «Безпека енергетики в епоху цифрової трансформації» та «Використання блокчейн технологій в енергетиці» (Київ, 2024, 2025); XXXII щорічна конференція Інституту ядерних досліджень НАН України (Київ, 2025); «Когнітивні дослідження: результати, виклики та перспективи» (Київ, 2024); «Актуальні питання фінансової політики України» (Київ, 2024); «Створення, охорона, захист і комерціалізація об'єктів права інтелектуальної власності» (Київ, 2025); «Статистичні методи та інформаційні технології.» (Хмельницький, 2024); «Проблеми вищої математичної освіти» (Вінниця, 2024); «Контроль і управління в складних системах» (Вінниця, 2022); Integration of Education, Science and Business (Дніпро, 2023).

Частину досліджень опубліковано у фахових наукових виданнях, включених до міжнародних баз даних. Зокрема, у журналі Cybernetics and Computer Technologies опубліковано статтю «Математичні моделі для інформаційних систем управління на цифрових платформах: від управління ресурсами до прогнозування попиту» [11], «Застосування методів теорії ігор для аналізу взаємодії валідаторів у proof-of-stake блокчейн-системах», а також спільну роботу «The Danube Basin as a High-Tech Transport Corridor Between the West and the East» [10], у журналі Problems of Control and Informatics, опубліковано статтю «Mathematical model for load balancing on digital platforms based on queueing theory and resource allocation optimization». Також результати дослідження включені до наукових монографій, зокрема до видання Strategic Priorities for Sustainable Development in the Context of Global Economic Transformation (Baltija Publishing, 2025) [20], а також до матеріалів щорічної наукової конференції Інституту ядерних досліджень НАН України.

Окремі ідеї, пов’язані з моделюванням ресурсів цифрових платформ, були обговорені на семінарах кафедри прикладної математики та на засіданнях наукових колективів Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, де отримали позитивну оцінку та рекомендації щодо подальшого розвитку.

Таким чином, результати дисертаційної роботи пройшли багаторівневу апробацію як у науковому, так і в прикладному середовищі, що підтверджує їхню наукову цінність і практичну значущість.

Для верифікації запропонованих моделей та методів проведено серію обчислювальних експериментів на основі чисельних процедур математичного моделювання. Обчислення виконувалися з використанням стандартних бібліотек наукових обчислень мови Python (NetworkX для роботи з графами, NumPy для статистичної обробки), що дозволило зосередитися на математичній суті алгоритмів та забезпечити відтворюваність результатів відповідно до сучасних стандартів відкритої науки. Такий підхід дозволяє зосередитися на математичній сутності алгоритмів, забезпечує модульність обчислювальних процесів та високу відтворюваність результатів, що відповідає сучасним стандартам відкритої науки.

Огляд літератури за темою дисертації. Дослідження математичних моделей та методів роботи цифрових платформ є міждисциплінарною задачею, що інтегрує теорію складних систем, математичну оптимізацію та цифрову економіку [38]. Фундаментальні засади системного аналізу, моделювання та прогнозування складних динамічних систем закладені в працях вітчизняних учених: сучасна методологія системного аналізу в поєднанні з інструментами штучного інтелекту для формалізації нелінійних взаємозалежностей у цифрових екосистемах детально розкрита у роботі М. З. Згуровського та Ю. П. Зайченка [17]. Методи адаптивного моделювання та прогнозування нелінійних нестаціонарних процесів на основі реальних даних, що дозволяють коректно описувати динаміку залучення користувачів в умовах високої невизначеності та стохастичної зміни ринкових умов, систематизовано в дослідженнях школи П. І. Бідюка [14, 23, 29].

Математичний опис мережевих ефектів та економіки багатосторонніх ринків представлено у фундаментальних працях Ж.-Ш. Роше та Ж. Тіроля [6, 7], які запропонували моделі ціноутворення з урахуванням перехресних мережевих ефектів, а також у роботах М. Армстронга [5], Д. Еванса [36] та Ж. Тіроля [32], що розширили підхід на стратегічну взаємодію платформ, регулювання та аналіз багатобічних ринків [50]. Питання цифрової трансформації в Україні та аналіз тенденцій цифрового ринку, зокрема стрімке зростання сектору платформних послуг та емпіричні дані інтеграції національної IT-екосистеми у глобальні тренди, відображені у звітах Міністерства цифрової трансформації [8, 37], дослідженнях Світового банку [35] та сучасних аналітичних публікаціях Ломачинської І. А. та співавт. [9]. Паралельно структурні та організаційні аспекти платформних екосистем досліджували Г. Паркер, М. Ван Алстайн та С.

Чоударі [38, 44], а також А. Тівана [49], що заклало теоретичну базу для подальшої математичної формалізації.

Важливе місце в роботі посідають методи прикладної математики, теорії графів та комбінаторної оптимізації. Алгоритмічна база оптимізації спирається на результати Т. Кормена та співавт. [15], М. Ньюмана [16], Р. Дістеля [22], Д. Веста [21] та Дж. Гросса та співавт. [39], які сформували сучасний апарат аналізу складних мереж. Для розв'язання задач розподілу ресурсів і матчингу використано підходи, розвинуті Ю. Нестеровим [19], Д. Бертсімасом та Л. Ванденберж [24], М. Ерготтом [42]. Стійкість цифрових платформ у динамічному середовищі та аналіз мережевих структур досліджуються у працях В. О. Стовби, зокрема в розробках щодо дворівневих задач розподілу ресурсів з обмеженнями на пропускну здатність проміжних вузлів, що безпосередньо стосуються оптимізації потоків у платформах [27, 43].

Питання стратегічної взаємодії між групами користувачів базуються на моделях, представлених у працях Д. Фуденберга та Ж. Тіроля, Н. Нісана та співавт., П. Мілгрома, а також у класичних роботах Дж. Неша. Конфліктна взаємодія та управління в умовах невизначеності детально висвітлені у дослідженнях В. Лахно, В. Малюкова та співавт., де запропоновано підходи до аналізу стратегій при динамічній взаємодії в умовах неповної інформації та застосування диференціальних ігор [26, 31]. Динаміка залучення та утримання учасників аналізується за допомогою методів теорії марківських процесів [12] та систем диференціальних рівнянь із зворотним зв’язком, що узагальнюють класичну модель Лотки–Вольтерра та її застосування до еволюційної динаміки, а також сучасні підходи до нелінійної динаміки [41].

Стохастичне програмування та моделювання в умовах невизначеності ґрунтуються на методах Дж. Бірга та Ф. Луво [18], Г. Інфангера [47], П. Калла та Дж. Маєра [48], А. Бен-Тала та співавт., а також А. Шапіро та співавт. Аналіз резильєнтності екосистем, алгоритмічної координації багатосторонніх учасників та формалізації процесів розподілу ресурсів у реальному часі досліджено у працях В. М. Горбачука, Д. І. Ніколенка та Д. О. Рибачка [30], а також у власних публікаціях автора щодо моделювання систем управління інформацією на цифрових платформах [11], застосування інтелектуального аналізу даних [12] та використання платформних рішень у високотехнологічних коридорах [10, 20]. Для забезпечення обчислювальної ефективності застосовано методи пошуку максимальних потоків мінімальної вартості, угорський алгоритм, алгоритми пошуку аугментуючих шляхів [39] та сучасні підходи до декомпозиції графів.

Незважаючи на значний обсяг публікацій вітчизняних та зарубіжних дослідників, створення цілісного математичного інструментарію, який би поєднував структурні моделі графів із динамічними моделями залучення користувачів, методами робастної оптимізації та алгоритмами реального часу, залишається недостатньо розробленим. Більшість існуючих підходів розглядають економічні, мережеві та оптимізаційні аспекти ізольовано, тоді як практика цифрових платформ вимагає інтегрованої формалізації, здатної забезпечити стійкість, масштабованість та справедливість розподілу ресурсів в умовах реальних ринкових збурень. Саме ця прогалина визначає наукову спрямованість даного дослідження та обумовлює необхідність розробки узагальненої математичної моделі, що синтезує структурний, динамічний та оптимізаційний рівні аналізу в єдину методологічну рамку.

Публікації. Результати досліджень та проведених емпіричних оцінок опубліковані в 39 наукових працях. Серед них 2 публікації внесені до міжнародної наукометричної бази Scopus, 4 публікацій у фахових виданнях за спеціальністю, 3 розділи у монографіях виданих у державах ЄС, 30 тез доповідей та матеріалів конференцій.

Публікації у наукових виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus

1. Gorbachuk V., Dunaievskyi M., Suleimanov S.-B., Godliuk V., Rubachok D. The Danube basin as the high-tech East-West transport corridor // 3rd International Conference on Problems of Logistics, Management and Operation in the East-West Transport Corridor. PLMO 2024.P. 60-64 DOI: 10.1109/PLMO62307.2024.10887176.

2. Gorbachuk V., Bardadym T., Dunaievskyi M., Suleimanov S.-B., Godliuk V., Rubachok D. Transport Corridors and Trade Barriers // In: Abbasov A., Sladkovski A. A., Babayev T. Problems of Logistics, Management and Operation in the East-West Transport Corridor. PLMO 2025. P. 94-106. DOI: 10.1007/978-3-032-13672-5_9.

Статті у наукових виданнях, включених на дату опублікування до переліку наукових фахових видань України за спеціальністю 113

3. Горбачук В. М., Дунаєвський М. С., Сулейманов С.-Б., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Дунайський басейн як високотехнологічний транспортний коридор між Заходом та Сходом // Cybernetics and Computer Technologies. 2024. № 4. С. 22–31. DOI: 10.34229/2707-451X.24.4.2.

4. Годлюк В. В. Математичні моделі для інформаційних систем управління на цифрових платформах: від управління ресурсами до прогнозування попиту // Cybernetics and Computer Technologies. 2025. №2. С. 37–46. DOI: 10.34229/2707-451X.25.2.3.

5. Годлюк В. В. Застосування методів теорії ігор для аналізу взаємодії валідаторів у proof-of-stake блокчейн-системах // Cybernetics and Computer Technologies. 2026. № 1. С. 16–27. DOI: 10.34229/2707-451X.26.1.2.

6. Godliuk V. Mathematical model for load balancing on digital platforms based on queueing theory and resource allocation optimization // Problems of Control and Informatics. 2026. Vol. 71, № 1. P. 5–13. DOI: 10.34229/1028-0979-2026-1- 1.

Розділи у монографіях, виданих у державах ЄС

7. Rybachok D., Godliuk V., Kushnir O. Nuclear informatics: key technologies and modeling // Education economy and AI: multidisciplinary perspectives for a digital future. Monograph. Katowice: The University of Technology in Katowice Press, 2025. P. 540-551. ISBN 978-83-68422-04-7. DOI: 10.54264/M051.

8. Bardadym T., Godliuk V. International experience in the formation of electricity markets: lessons for the reconstruction of the Ukrainian energy system in the face of military challenges // Economics and Management in Conditions of Military Challenges: Collective monograph. Riga: Baltia Publishing, 2025. P. 1-13. ISBN 978-9934-26-628-7. DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-26-628-7-1.

9. Godliuk V., Golotsukova T. Digital platforms in the context of sustainable development: mathematical modeling, technological innovations, and investment prospects in the energy sector // Strategic Priorities for Sustainable Development in the Context of Global Economic Transformation: Scientific monograph. Riga: Baltia Publishing, 2025. P. 768–790. ISBN 978-9934-26-575-4. DOI: 10.30525/978-9934-26-575-4-29.

Список публікацій здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

10. Годлюк В. Математичне моделювання стійкості освітніх екосистем у кризових умовах з використанням цифрових платформ // Edukacja i społeczeństwo X. Zbiór prac naukowych. Akademia Śląska: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Technicznej w Katowicach, Polska, 2026. С. 363–370. ISBN 978-83-68422-14-6. DOI: 10.54264/M058.

11. Горбачук В., Годлюк В., Рибачок Д. Від сигналів, мов, письма, бібліотек, 2D-друку, Інтернету до ноосфери, клонування, 3D-друку, ChatGPT, N-комп'ютеризації та технологічної сингулярності. // Інтелектуальне надбання академіка Володимира Вернадського і світова фізико-економічна думка / ред. В. В. Небрат. Київ : КНЕУ, 2023. С. 39–43. ISBN 978-966-926-436-7.

12. Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Шляхи розуміння України // 5th International Scientific and Practical Internet Conference "Integration of Education, Science and Business in Modern Environment: Summer Debates" devoted to the search for latest ideas for development at international, national and regional levels. August 3–4, 2023, Dnipro, Ukraine. С. 167–169. ISBN 978-617-8293-07-9.

13. Годлюк В. В. Ефективність логістики країн Дунайського басейну // Статистичні методи та інформаційні технології аналізу соціально-економічного розвитку. 2024. С. 174–176. ISBN 978-617-7572-78-6.

14. Годлюк В. В. Інформаційні технології: ключ до безпечного та ефективного розмінування // Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання. 2024. С. 15– 16. ISBN 978-966-640-560-2.

15. Годлюк В. В. Освіта та фондові ринки: інтеграція штучного інтелекту та сучасних технологій // Міжнародна науково-методична Інтернет-конференція, присвячена вирішенню математичних викликів сучасності, 20–22 червня 2024 року. Вінниця: Вінницький національний технічний університет, 2024. С. 193– 196. ISBN 978-617-8163-15-0.

16. Горбачук В., Ніколенко Д., Годлюк В., Рибачок Д. Про цільові реконфігурації мереж // Комбінаторні конфігурації та їхні застосування: матеріали XXVI Міжнародного науково-практичного семінару, присвяченого пам'яті професора Донця Г.П. (13–15 червня 2024р., Кропивницький–Запоріжжя–Київ, Україна) / ред. Л. Ф. Гуляницький. Кропивницький: Центральноукраїнський національний технічний університет. 2024. С. 34–43. ISBN 978-617-7942-27-5.

17. Golotsukova T., Godliuk V. Risks, resilience, and critical infrastructure management: digital, environmental and social aspects // Innovation and digital transformation: education, economy and society dimensions. Monograph. Katowice: The University of Technology in Katowice Press, 2025. P. 286–292. ISBN 978-83-68422-09-2. DOI: 10.54264/M054.

18. Горбачук В., Ніколенко Д., Годлюк В., Рибачок Д. Соціалізація, інвестиції у засоби комунікацій, переванатаження та економічне регулювання черг // Izobraževanje in družba IX: zbornik konference. Prešov: Univerza v Prešove, Slovakia, 2024. С. 170–181. ISBN 978-80-555-3353-7.

19. Горбачук В., Осипенко С., Годлюк В., Рибачок Д. Е-відкриття для функції законності та правопорядку // Когнітивні дослідження: результати, виклики та перспективи (24 травня 2024 р., Київ, Україна) / ред. В. Є. Синиця. Київ : КНУ імені Тараса Шевченка; Каравелла. 2024. С. 124–133. ISBN 978-960-801-899-0.

20. Gorbachuk V. M., Godliuk V. V., Nikolenko D. I. To optimal contracts under uncertainty // IX International Conference on Decision Making under Uncertainty (PDMU-2025), September 30 - October 1. 2025. Bielsko-Biala, Poland. P. 63-64. ISBN 978-615-355-310-7.

21. Горбачук В. М., Ніколенко Д. І., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Соціалізація, інвестиції у засоби комунікацій, перенавантаження та економічне регулювання черг. Vzdelávanie a spoločnosť. Prešovská univerzita v Prešove. R.Bernatova, T. Nesterenko. Prešov, 2024. С. 169–180.

22. Горбачук В. М., Батіг Л. О., Годлюк В. В. Застосування мережевих ефектів цифровими платформами // Контроль і управління в складних системах (15–17 жовтня 2022 р., Вінниця). Вінниця : ВНТУ, 2022.

23. Горбачук В. М., Годлюк В. В. Мережеві ефекти цифрових платформ // Інноваційні ідеї в економічній науці: пошуки вирішення сучасних проблем. Київ : НаУКМА, 2022. С. 15–17.

24. Горбачук В., Годлюк В., Рибачок Д. Застосування інтелектуального аналізу даних // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023): тези доповідей XXI Міжнародної науково-практичної конференції (Дніпро, 22–24 листопада 2023 р.) / під заг. ред. О. М. Кисельової. Дніпро: ДНУ. 2023. С. 107–108.

25. Годлюк В. В. Інвестиції у забезпечення безпеки: розмінування як шлях до стабільності // Піонер кібернетики академік В. М. Глушков: ідеї для майбутнього. До 100-річчя з дня народження В. М. Глушкова : матеріали 12-ої Міжнар. наук.-практ. конф. «Глушковські читання». Київ, 2023. С. 20-24.

26. Горбачук В. М., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Глобальне співробітництво ЄС та Японії в економічній безпеці // Інноваційні ідеї в економічній науці: пошуки вирішення сучасних проблем / Національний університет «Києво-Могилянська академія», кафедра економічної теорії, Науково-навчальний центр «Інноваційна лабораторія» НаУКМА. Київ: НаУКМА. 2023. С. 24–25.

27. Годлюк В., Ніколенко Д., Рибачок Д. Еволюційне моделювання фінансової сфери та його використання // II International Scientific and Practical Conference «Information Systems and Technologies: Results and Prospects» (IST-2024), March 6, 2024. Київ: FIT TSNUK. 2024. С. 142–146.

28. Горбачук В. М., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Ринок для штучного інтелекту // Системи та засоби штучного інтелекту: тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Штучний інтелект: досягнення, методи та ризики». Київ: ІПШІ «Наука і освіта», 15–16 березня 2024 р. С. 41–45.

29. Горбачук В. М., Ніколенко Д. І., Пустовойт М. М., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Смарт-контракти в енергетиці // Науково-практична конференція «Використання блокчейн-технологій в енергетиці». Київ : ПІМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України, 5 червня 2024 р., С. 6-10.

30. Горбачук В. М., Бардадим Т. О., Дунаєвський М. С., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Основи децентралізованих ринків електроенергії // Використання блокчейн-технологій в енергетиці – 2025: збірник матеріалів науково-практичної конференції (м. Київ, 26 березня 2025 р.). Київ: ПІМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. 2025. С. 15-18.

31. Горбачук В. М., Дунаєвський М. С., Осипенко С. П., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Менеджмент ризиків для прикладної безпеки // VI-і читання Анатолія Вадимовича Свідзинського: матеріали доповідей (м. Луцьк, 28 лютого – 1 березня 2025 р.). Луцьк. 2025. С. 35–37.

32. Годлюк В. В. Модель Леонтьєва-Форда як інструмент аналізу ресурсів у цифрових платформах // VI-і читання Анатолія Вадимовича Свідзинського: матеріали доповідей (м. Луцьк, 28 лютого – 1 березня 2025 р.). Луцьк, 2025. С. 32–34.

33. Горбачук В. М., Годлюк Г. В., Ніколенко Д. І., Годлюк В. В., Ніколенко Д. Я. Резильєнтність систем за даними індикаторів. // Резильєнтність динамічних систем, науково-практична конференція Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук України : матеріали (Київ, 27 грудня 2024 р.). Київ : ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України, 2024. С. 26-31.

34. Gorbachuk V. M., Nikolenko D. I., Godliuk V. V., Rybachok D. O. Sensitivity of goal function in r-facility interdiction covering problem and systemic risk // 3rd Workshop on Reliability Engineering and Computational Intelligence (RECI-2024)

(November 6–11, 2024, Žilina, Slovakia). – Žilina : IEEE Chapter of Reliability Society of the Czechoslovakia Section ; European Safety and Reliability Association (ESRA); Slovak Research and Development Agency; Institute of Information Technologies ; University of Žilina. 2024. P. 45.

35. Годлюк В. В. Еволюційні обчислення в економіці та їх застосування // Актуальні питання фінансової політики України задля забезпечення фінансової стабільності (22 лютого 2024р., Київ, Україна). Київ: НаУКМА. 2024. С. 30 –34.

36. Годлюк В. В. Математичне моделювання та алгоритмічні підходи до оптимізації роботи цифрових платформ у контексті інтелектуальних систем // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (20–22 листопада 2024 р., Дніпро). Дніпро: ДНУ ім. О. Гончара. 2024. С. 101–102.

37. Горбачук В. М., Годлюк В. В., Ніколенко Д. І., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Послуги з погляду цифрового десятиліття // Безпека енергетики в епоху цифрової трансформації (13 грудня 2024 р., Київ, Україна). Київ: Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України. 2024. С. 91-94

38. Годлюк В. В. Алгоритми ідентифікації аномалій у динамічних цифрових платформах з використанням методів машинного навчання // Резильєнтність динамічних систем, науково-практична конференція Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук України: матеріали (Київ, 27 грудня 2024 р.). Київ: ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. 2024. С. 154-157.

39. Горбачук В. М., Бардадим Т. О., Дунаєвський М. С., Годлюк В. В., Голоцукова Т. Г., Рибачок Д. О. Програмне забезпечення для цифрових систем ядерних реакторів // XXXII щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України : анотації до доповідей (м. Київ, 26–30 травня 2025 р.). Київ: Ін-т ядерних досліджень НАН України. 2025. С. 102-103.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 109 найменувань, та додатків. Містить 7 таблиць. Повний обсяг дисертації становить 128 сторінок.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, об'єкт і предмет дослідження, визначено наукову новизну, теоретичне та практичне значення роботи.

У першому розділі здійснено аналіз цифрових платформ як об'єктів математичного моделювання, подано їх класифікацію, описано основні процеси функціонування (взаємодія учасників, мережеві ефекти, ціноутворення, матчинг), проаналізовано існуючі підходи до моделювання (економічні, мережеві, ігрові, оптимізаційні) та їх обмеження для задач оптимізації в реальному часі.

Другий розділ присвячено розробці математичних моделей функціонування цифрових платформ. Зокрема, розроблено мережеву модель у вигляді динамічного дводольного графа з урахуванням активності учасників, часових характеристик, геолокації та репутаційних оцінок; представлено динамічну модель залучення учасників на основі марківських ланцюгів та систем диференціальних рівнянь із зворотним зв'язком; розглянуто модель матчингу попиту та пропозиції з обмеженнями; проведено аналіз властивостей запропонованих моделей щодо існування розв'язку, стійкості та масштабованості.

У третьому розділі представлено методи аналізу та оптимізації роботи цифрових платформ. Сформульовано задачу багатокритеріального матчингу як задачу дискретної оптимізації, описано застосування методів лінійного, нелінійного та стохастичного програмування, запропоновано алгоритми матчингу на основі теорії графів, а також представлено результати чисельних експериментів.

У висновках узагальнено основні результати дисертаційного дослідження, сформульовано практичні рекомендації щодо їх використання.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ЦИФРОВИХ ПЛАТФОРМ ЯК ОБ'ЄКТІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. Класифікація цифрових платформ (однобічні, двобічні, багатобічні)

Цифрові платформи, як інформаційно-координаційні системи, відрізняються за структурою взаємодії між учасниками, що визначає їхню функціональну природу та математичну модель [17, 29]. Найбільш поширеною основою класифікації є кількість однорідних груп користувачів, між якими платформа забезпечує взаємодію. Згідно з цим критерієм розрізняють однобічні, двобічні та багатобічні платформи [5, 36].

Однобічні платформи спрямовані на обслуговування однієї групи користувачів, при цьому їм надається доступ до контенту, інструментів або сервісів без необхідності взаємодії з іншими групами. До цього типу належать, наприклад, медіаплатформи (YouTube, Spotify), хмарні сервіси (Google Drive, Dropbox) або ігрові платформи. З математичної точки зору такі системи можна моделювати як динамічні мережі з однорідними вершинами, де основна увага приділяється оптимізації доставки даних, управлінню навантаженням або персоналізації контенту, а не координації між різними сторонами [15, 16]. Такий підхід широко використовується в аналізі потокових сервісів та хмарних інфраструктур.

Двобічні платформи, навпаки, створюють умови для взаємодії між двома чітко вираженими групами учасників – зазвичай споживачами та постачальниками. Прикладами є Uber (пасажири ↔ водії), Airbnb (гості ↔ господарі), Upwork (клієнти ↔ фрілансери). Саме цей тип платформ є центральним об'єктом дослідження у даній роботі, оскільки він виявляє найбільш виражені мережеві ефекти та потребує складного матчингу в реальному часі [6, 7, 38]. Математично такі платформи природно моделюються як дводольні графи, де вершини розділені на дві неперетинні множини, а ребра відображають потенційні або реальні взаємодії [21, 22]. Динаміка таких систем вимагає врахування часових, просторових та репутаційних обмежень, що робить їх об'єктом глибокого прикладно-математичного аналізу [26, 31].

Багатобічні платформи узагальнюють двобічну модель, охоплюючи три і більше груп учасників, кожна з яких відіграє унікальну роль у екосистемі [49]. Економічні та стратегічні аспекти організації таких платформ, включаючи питання власності та контролю, детально проаналізовано у працях [50]. Прикладом може бути операційна система або платформа електронної комерції з інтегрованими платіжними, логістичними та рекламними сервісами. У таких системах взаємодія стає багатовимірною, а мережеві ефекти – нелінійними та взаємозалежними [40, 41]. Математичне моделювання багатобічних платформ часто вимагає використання гіперграфів, багатошарових мереж або складних систем з розподіленим зворотним зв'язком [44].

Таким чином, класифікація платформ за кількістю сторін не лише відображає їхню функціональну архітектуру, а й визначає відповідний математичний апарат для їхнього аналізу [11]. У цій роботі основна увага зосереджена на двобічних платформах послуг, оскільки саме вони поєднують достатню структурну складність із чіткістю формалізації, що дозволяє розробити нові моделі та методи оптимізації в рамках прикладної математики.

1.2. Основні процеси на платформах: взаємодія учасників, мережеві ефекти, ціноутворення, матчинг

Функціонування цифрових платформ базується на комплексі взаємопов'язаних процесів, серед яких ключовими є взаємодія учасників, мережеві ефекти, механізми ціноутворення та матчинг [17, 29]. Саме ці процеси визначають ефективність, стійкість і конкурентоспроможність платформи як економічної та інформаційної системи.

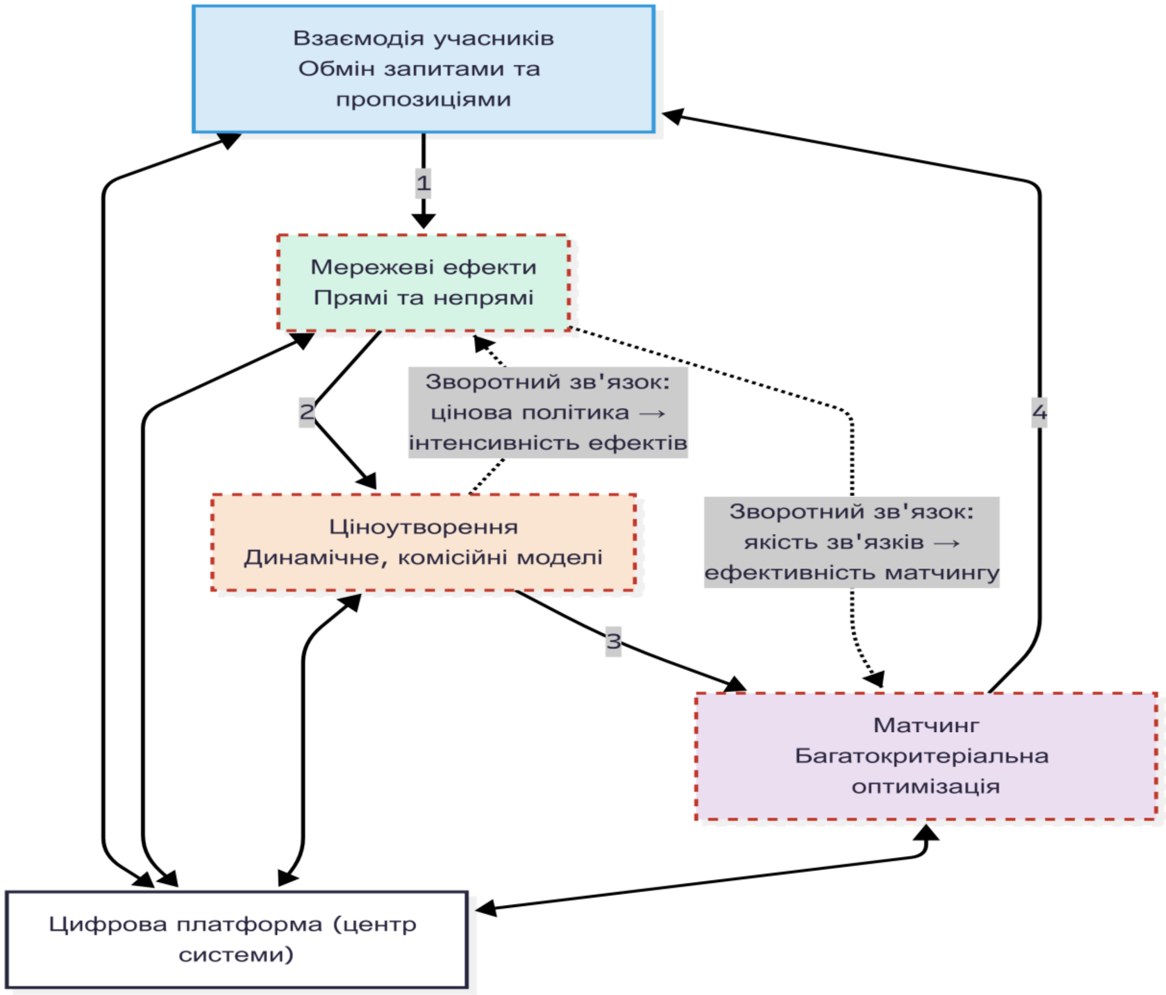
Взаємодія учасників на платформі має багатосторонній характер і залежить від типу платформи. У двобічних системах ця взаємодія реалізується через обмін запитами та пропозиціями, де кожна сторона отримує користь лише за умови наявності партнера [5]. Така залежність формує основу для виникнення мережевих ефектів – явища, за якого цінність платформи для кожного учасника зростає зі збільшенням кількості інших учасників [6, 7, 51]. Розрізняють прямі мережеві ефекти (коли користь зростає в межах однієї групи) та непрямі (коли зростання числа провайдерів підвищує цінність для споживачів, і навпаки) [38]. У контексті платформ послуг саме непрямі ефекти є домінуючими і визначають стратегії залучення та утримання користувачів [36].

Ціноутворення на цифрових платформах суттєво відрізняється від традиційних ринків [52]. Замість єдиної ціни за товар, платформи часто використовують диференційовані механізми: динамічне ціноутворення, комісійні моделі або стратегічне субсидування однієї сторони за рахунок іншої [26, 31]. Такі стратегії спрямовані не лише на максимізацію прибутку, а й на підтримання балансу між сторонами, що критично для стабільності системи в умовах флуктуацій попиту [44].

Одним із найважливіших процесів у двобічних платформах є матчинг – механізм пошуку пари, наприклад, призначення провайдерів клієнтам. Ефективність матчингу визначає якість обслуговування, час очікування та загальний рівень задоволеності користувачів. У сучасних платформах матчинг часто реалізується за допомогою алгоритмів, основаних на теорії графів, оптимізації та системного аналізу [23, 53]. Наприклад, задача може формулюватися як пошук максимального потоку в мережі [21, 22, 39], або як багатокритеріальна задача дискретної оптимізації з обмеженнями на час, відстань і репутацію [28, 42].

При цьому важливо враховувати динамічний характер запитів: нові клієнти постійно надходять, а провайдери стають недоступними, що вимагає розробки адаптивних алгоритмів на основі методів стохастичного програмування та аналізу динамічних систем [18, 19, 41]. Особливого значення набуває врахування затримок у реакції системи [40] та забезпечення робастності рішень [30].

Рисунок 1 Концептуальна діаграма процесів



Таким чином, взаємодія цих чотирьох процесів – взаємодії, мережевих ефектів, ціноутворення та матчингу – утворює складну динамічну систему, яка потребує глибокої математичної формалізації для забезпечення її ефективного управління [10, 20].

1.3. Підходи до моделювання: економічні, мережеві, ігрові, оптимізаційні

Аналіз цифрових платформ як складних систем здійснюється за допомогою різноманітних підходів до моделювання, кожен з яких має свої припущення, цілі та обмеження. Найпоширенішими серед них є економічні, мережеві, ігрові та оптимізаційні підходи, які часто доповнюють один одного, але відрізняються рівнем абстракції та прикладної спрямованості [17, 29].

Економічні моделі, започатковані працями Ж.-Ш. Роше та Ж. Тіроля, розглядають платформи через призму ринкової рівноваги, ціноутворення та мережевих ефектів. Такі моделі дозволяють аналізувати стратегічні рішення операторів платформ щодо цін, субсидій та входу на ринок [5], але зазвичай не враховують мікрорівневу динаміку взаємодії окремих учасників [36]. Вони орієнтовані на агреговані показники і слабо придатні для задач управління в реальному часі [38]. Подібність динаміки ринкових процесів до біологічних та екологічних систем, що вимагає використання відповідного математичного апарату диференціальних рівнянь, обґрунтовано у роботах вітчизняних дослідників [54]. Подальший розвиток цього напрямку отримав у дослідженнях цифрових екосистем [2].

Мережевий підхід, навпаки, фокусується на структурі взаємодії між учасниками, моделюючи платформу як граф, де вершини – це користувачі, а ребра – зв’язки або транзакції [16]. Цей підхід дозволяє застосовувати апарат теорії складних мереж для аналізу центральності, кластеризації та резильєнтності [21, 22]. Особливо ефективним він є для двобічних платформ, які природно уявляються у вигляді дводольних графів [39]. Однак класичні мережеві моделі часто є статичними і не враховують часову еволюцію системи, що обмежує їхню придатність для динамічних сервісів [40].

Ігровий підхід розглядає платформу як середовище стратегічної взаємодії між раціональними учасниками, кожен з яких прагне максимізувати власну корисність [53, 55]. У цьому контексті аналізуються рівноваги Неша [56], механізми стимулювання та стійкість до маніпуляцій [26, 31, 57]. Такий підхід широко використовується в аукціонних системах та рекламних мережах [44, 58], але його застосування вимагає сильних припущень щодо раціональності та повноти інформації [28].

Оптимізаційний підхід, який є центральним для прикладної математики, формулює задачі функціонування платформи як задачі мінімізації або максимізації цільової функції за певних обмежень [24]. До таких задач належать матчинг попиту та пропозиції, балансування навантаження та розподіл ресурсів [19, 23]. Цей підхід дозволяє отримувати обґрунтовані та верифіковані рішення, особливо в поєднанні з методами дискретної оптимізації та теорії графів [15, 42]. У разі невизначеності застосовуються методи стохастичного [18, 47, 48] та робастного програмування [30, 43]. Саме цей напрямок забезпечує можливість побудови алгоритмів, придатних для впровадження в реальних системах [20], зокрема в умовах обмежених ресурсів, характерних для українського ринку [8, 10, 37].

Порівняльний аналіз розглянутих підходів за ключовими методологічними характеристиками дозволяє виявити їхні сильні та слабкі сторони у контексті задач управління цифровими платформами. На рівні абстракції економічні моделі оперують макроскопічними агрегованими показниками, такими як сукупний попит, пропозиція та ціна, фокусуючись на аналізі ринкових рівноваг. Мережевий підхід, навпаки, працює на мікрорівні, описуючи топологію взаємодії через вершини, ребра та спільноти, тоді як ігровий підхід займає мезорівень, моделюючи стратегічну поведінку раціональних агентів та концепції рівноваги Неша. Оптимізаційні методи також належать до мікрорівня, проте зосереджені на пошуку конкретних рішень (наприклад, призначень або маршрутів) шляхом формалізації цільових функцій та обмежень.

Щодо придатності для прийняття рішень у реальному часі, економічні та ігрові підходи демонструють низьку ефективність: перші орієнтовані на довгострокову рівновагу й не враховують миттєвих змін стану системи, а другі вимагають обчислювально витратного пошуку рівноваг, до того ж їхні припущення про повну раціональність учасників рідко виконуються на практиці. Мережеві моделі мають середню придатність: хоча статичні графи не підходять для онлайн-середовища, сучасні динамічні розширення дозволяють оновлювати структуру в реальному часі. Натомість оптимізаційний підхід забезпечує високу оперативність завдяки алгоритмам із гарантованою поліноміальною або псевдополіноміальною складністю, що дозволяє отримувати розв'язки за мілісекунди.

Обчислювальна складність та здатність враховувати невизначеність також суттєво різняться. Аналіз рівноваги в економічних моделях є відносно легким, проте їхні динамічні розширення (на основі диференціальних рівнянь) значно ускладнюються. Мережевий аналіз статичних структур має поліноміальну складність, яка зростає при інтеграції часової динаміки. Ігрові задачі часто належать до класу PPAD і вимагають ітеративних методів із повільною збіжністю. Оптимізаційні методи демонструють змінну складність (від лінійної до експоненціальної для NP-складних задач), проте на практиці ця проблема вирішується за рахунок гібридних стратегій та евристики. У контексті невизначеності економічні моделі використовують стохастичні розширення рідко, мережеві – лише в сучасних темпоральних варіантах, ігрові – через байєсівські ігри зі сильними апріорними припущеннями, тоді як оптимізаційний підхід спеціально розроблений для роботи в умовах неповної інформації завдяки інструментам стохастичного та робастного програмування (зокрема методу усередненої апроксимації SAA).

Ключові обмеження кожного підходу для задач реального часу полягають у наступному: економічні моделі ігнорують мікрорівневу динаміку, часові вікна та просторову локалізацію, зосереджуючись на стратегічному плануванні; статичні мережеві моделі не відображають еволюцію системи та слабо інтегровані з алгоритмами прийняття рішень; ігрові моделі страждають від нереалістичних припущень про раціональність та високої обчислювальної вартості; оптимізаційні ж методи вимагають ретельної формалізації обмежень, а для великих масштабів залежать від евристик, що може незначно знижувати точність. Відповідно до цих характеристик, типові сфери застосування також розмежовані: економічний підхід домінує в аналізі цінової політики та оцінці регуляторного впливу, мережевий – у виявленні ключових учасників та оцінці резильєнтності структури, ігровий – у проектуванні аукціонів і механізмів стимулювання, а оптимізаційний – безпосередньо в динамічному матчингу, балансуванні навантаження, маршрутизації та оперативному розподілі ресурсів.

Таким чином, кожен із підходів має свою цінність, але лише оптимізаційний і мережевий підходи забезпечують достатній рівень формалізації, швидкодії та стійкості до невизначеності, необхідний для побудови алгоритмів управління цифровими платформами в реальному часі, що й обґрунтовує їхнє домінування у подальшому викладі дисертації.

1.4. Обмеження економічних та ігрових підходів для задач оптимізації в реальному часі

Незважаючи на значний внесок економічних та ігрових підходів у розуміння стратегічної природи цифрових платформ, їх застосування для розв'язання задач оптимізації в реальному часі зустрічає суттєві обмеження [17, 29]. Економічні моделі, зокрема ті, що ґрунтуються на теорії двобічних ринків [6, 7], орієнтовані на аналіз рівноважних станів і довгострокових стратегій ціноутворення [5, 36]. Вони оперують агрегованими показниками – такими як загальний попит, середня ціна або еластичність, – і не враховують мікрорівневу динаміку окремих взаємодій, яка є критичною для оперативного управління. У реальних умовах платформа повинна приймати рішення щодо матчингу, маршрутизації або розподілу ресурсів протягом секунд або навіть мілісекунд, що вимагає не рівноважного аналізу, а швидкодіючих алгоритмів з гарантованими оцінками складності та якості розв'язку [15, 19].

Ігровий підхід, хоча й дозволяє моделювати стратегічну поведінку учасників [53], спирається на припущення про раціональність, повну інформацію та стабільність переваг, які часто не виконуються на практиці [26, 31]. У реальних цифрових платформах користувачі можуть діяти ірраціонально, мати обмежену інформацію про систему або змінювати свої цілі впродовж сесії. Крім того, пошук рівноважних концепцій є обчислювально складною задачею, особливо в умовах великих масштабів і динамічного середовища. Це робить ігрові моделі малопридатними для вбудовування в системи управління в реальному часі, де пріоритетом є швидкість і надійність, а не теоретична оптимальність у стратегічному сенсі.

Обидва підходи також слабо враховують технічні обмеження: пропускну здатність мережі, обмеження на обчислювальні ресурси, часові вікна виконання завдань або геопросторову динаміку [16, 21]. Натомість, оптимізаційні та мережеві підходи, основані на дискретній математиці та теорії алгоритмів, дозволяють формулювати задачі у вигляді, придатному для чисельного розв’язання, і забезпечують можливість компромісу між якістю та швидкодією [24, 42]. Зокрема, методи лінійного програмування, стохастичної оптимізації [18, 47] та моделювання затримок [40] дають змогу враховувати невизначеність та обмежені ресурси [10].

Саме ця властивість робить їх незамінними для практичного застосування в сучасних цифрових платформах, де ефективність визначається не лише економічною доцільністю, а й здатністю оперативно реагувати на зміни середовища. Як показано в дослідженнях [11, 30], лише формалізовані математичні моделі, інтегровані з алгоритмами реального часу, забезпечують стійкість платформ у умовах високої динаміки та обмежених ресурсів [20, 43].

Таким чином, хоча економічні та ігрові моделі мають важливе теоретичне значення [2], їх обмежена придатність до задач реального часу обґрунтовує необхідність переходу до більш формалізованих, алгоритмічно орієнтованих підходів у рамках прикладної математики [14].

1.5. Проблеми, що потребують математичного формалізму

Незважаючи на існування підходів до аналізу цифрових платформ, ряд ключових проблем залишається недостатньо формалізованим з погляду прикладної математики [17, 29]. Серед них – нерівномірність завантаження провайдерів, нестійкість матчингу за умов високої динаміки попиту, неефективне розподілення обчислювальних та логістичних ресурсів, а також відсутність гарантій щодо якості рішень у реальному часі. Ці проблеми мають спільну рису: вони виникають на мікрорівні взаємодії учасників і вимагають точного, алгоритмічно обґрунтованого підходу, який не може бути забезпечений лише економічними або ігровими моделями [26, 31].

Нерівномірне завантаження провайдерів – поширена проблема, коли частина постачальників послуг постійно перезавантажена, тоді як інші залишаються недовикористаними. Для її вирішення потрібна формалізація балансування навантаження як задачі оптимізації з обмеженнями на дисперсію завантаження або максимальну інтенсивність [23, 28, 42]. Такий підхід дозволяє одночасно враховувати справедливість та продуктивність, що особливо актуально для платформ у сфері фрілансу та транспорту [11].

Нестійкість матчингу проявляється у високій чутливості системи до малих збурень – наприклад, раптового сплеску запитів у певному регіоні. У таких умовах традиційні алгоритми можуть призводити до локальних «заторів», що вимагає розробки робастних стратегій, здатних адаптуватися до флуктуацій без втрати глобальної ефективності [18, 47, 48]. Як показано в дослідженнях [30], саме робастність до зовнішніх шоків є критичним фактором стійкості цифрових платформ у умовах нестабільного середовища.

Неефективне розподілення ресурсів часто пов’язане з відсутністю інтегрованої моделі, яка одночасно враховувала б часові, просторові, репутаційні та обчислювальні обмеження [16, 21, 22]. Такі задачі вимагають багатокритеріального підходу, де цільова функція включає кілька конфліктуючих компонентів [19, 24, 42]. Подібні моделі вже застосовуються в логістиці та управлінні транспортними коридорами, зокрема в контексті Дунаю [10].

Крім того, у багатьох платформах відсутні формальні оцінки стійкості, масштабованості та обчислювальної складності алгоритмів, що ускладнює їхнє застосування в умовах зростання кількості користувачів [15, 46]. Без детального математичного аналізу неможливо гарантувати, що система не вийде з ладу під навантаженням [14]. Особливо це актуально для локальних платформ, де інфраструктурні обмеження посилюють вплив алгоритмічних рішень [8, 37].

Аналіз функціонування цифрових платформ у просторі параметрів «попит- пропозиція» дозволяє ідентифікувати чотири критичні зони, у яких система втрачає стійкість або суттєво знижує ефективність. Перша зона, умовно названа «смертельною», відповідає стану низької критичної маси обох сторін ринку: коли кількість активних споживачів та доступних провайдерів одночасно перебуває нижче порогових значень, непрямі мережеві ефекти не спрацьовують, і платформа не здатна забезпечити мінімально прийнятний рівень сервісу. У цьому режимі ймовірність успішного матчингу прямує до нуля, а будь-який зовнішній шок (наприклад, тимчасове зниження активності) може призвести до незворотного відтоку учасників і колапсу екосистеми.

Друга зона характеризується дисбалансом між попитом та пропозицією за умови достатньої загальної чисельності учасників: коли, наприклад, попит різко зростає в певному регіоні або часовому інтервалі, а пропозиція залишається незмінною. У цьому квадранті виникає нестійкість матчингу – алгоритми, орієнтовані на мінімізацію часу очікування, починають «перенавантажувати» обмежену групу провайдерів, що призводить до зростання їхнього відтоку через виснаження та, як наслідок, до подальшого погіршення балансу. Такий позитивний зворотний зв'язок може спровокувати каскадне зниження якості сервісу навіть за наявності достатньої загальної кількості ресурсів.

Третя зона відповідає стану системного перезавантаження, коли обидві сторони ринку чисельно великі, але інфраструктурні або алгоритмічні обмеження не дозволяють ефективно координувати їхню взаємодію. У цьому режимі зростають обчислювальні витрати на розв'язання задачі матчингу, збільшується затримка прийняття рішень, а якість підборів погіршується через необхідність компромісів між конфліктуючими критеріями. Платформа формально функціонує, але її операційна ефективність суттєво нижча за потенційно досяжну, довші маршрути провайдерів або неоптимальний розподіл завантаження.

Четверта зона, розташована в центральній частині простору параметрів, відображає проблему географічного упередження: навіть за збалансованих агрегованих показників попиту та пропозиції, просторова неоднорідність їхнього розподілу призводить до того, що окремі регіони (наприклад, віддалені або малонаселені) систематично отримують гірший сервіс. Це явище посилюється, якщо алгоритм матчингу не враховує локальну щільність запитів або якщо вагові коефіцієнти відстані домінують над іншими критеріями. У результаті формується стійка просторова нерівність, яка може суперечити принципам соціальної інклюзії та обмежувати довгострокове зростання платформи.

Така класифікація проблемних станів підкреслює необхідність розробки адаптивних алгоритмів, здатних автоматично ідентифікувати поточний режим системи за допомогою он-лайн моніторингу ключових метрик (щільність запитів, дисперсія завантаження, локальна щільність провайдерів) та динамічно коригувати стратегію матчингу – наприклад, змінювати ваги цільової функції, активувати механізми географічного вирівнювання або тимчасово знижувати пороги допустимості ребер у графі взаємодії. Саме такий підхід, інтегрований у запропоновану модель, забезпечує стійкість платформи в умовах високої динаміки та невизначеності ринкового середовища.

Таким чином, вирішення цих проблем вимагає глибокої математичної формалізації – побудови моделей на основі аналізу динамічних систем [40, 41] та розробки методів, що забезпечують надійність і масштабованість [20]. Саме це й становить наукову потребу, яку задовольняє дане дослідження.

1.6. Висновки за розділом та формулювання наукової проблеми

Аналіз існуючих підходів до моделювання цифрових платформ показав, що незважаючи на різноманітність методів – від економічних [6, 7, 36] до мережевих [16, 39] – залишається суттєва прогалина у формалізації процесів, які відбуваються на мікрорівні взаємодії учасників у реальному часі. Економічні та ігрові моделі [38, 53] добре пояснюють стратегічну поведінку та ринкову динаміку, але не забезпечують алгоритмічної основи для оперативного управління [26, 31]. Мережеві підходи дають цінні інструменти для аналізу структури [21, 22], проте часто нехтують динамікою, часовими обмеженнями та багатокритеріальністю цілей [40].

Виявлено, що ключові проблеми – такі як нерівномірне завантаження провайдерів, нестійкість матчингу під впливом флуктуацій попиту, відсутність механізмів балансування між ефективністю та справедливістю, а також недостатня робастність алгоритмів – не мають достатньо розроблених математичних моделей, які б одночасно враховували структуру, динаміку та обмеження реального середовища [17, 29]. Більшість існуючих рішень є або занадто абстрактними, або емпіричними, без строгого обґрунтування щодо стійкості, масштабованості та якості розв’язку [14, 23, 28].

Подолання цієї проблеми вимагає розробки нових моделей на основі теорії складних мереж [16], динамічного моделювання [41] та багатокритеріальної дискретної оптимізації [23, 42]. Особливу роль відіграють методи робастного та стохастичного програмування [18, 47, 48], які дозволяють враховувати невизначеність, характерну для реальних умов [30]. Крім того, важливим є врахування специфіки локальних ринків, зокрема українського, де інфраструктурні та економічні обмеження посилюють вплив алгоритмічних рішень [8, 37]. Як показано в дослідженнях [11], лише інтегрований підхід, що поєднує теорію, алгоритми та емпіричну верифікацію [20], може забезпечити практичну цінність результатів у сфері цифрових платформ.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ЦИФРОВИХ ПЛАТФОРМ

2.1. Мережева модель платформи як дводольного графа (з урахуванням активності, ваг, часових характеристик)

Для формалізації структури взаємодії учасників двобічної цифрової платформи послуг доцільно застосувати апарат теорії графів, зокрема модель динамічного дводольного графа [21, 22, 59, 60]. Цей підхід природно відображає поділ учасників на дві неперетинні множини: споживачів $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ та провайдерів $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, між якими можливі взаємодії, але відсутні зв’язки всередині кожної групи [39].

У будь-який момент часу $t \in [0, T]$ стан платформи описується графом

$$G(t) = \Big(C(t), P_{free}(t), E(t), w(t)\Big), \tag{2.1}$$

де $C(t)$ – множина активних клієнтів (запити ще не виконані й не прострочені), $P_{free}(t)$ – множина вільних провайдерів, $E(t) \subseteq C(t) \times P_{free}(t)$ – множина допустимих ребер, а $w(t)$ – функція ваг, що визначає якість або вартість кожного можливого зв’язку. Ребро (c_i, p_j) вважається допустимим, якщо провайдер p_j здатен фізично досягти клієнта c_i до моменту $t + \tau_i$, де τ_i – максимальний допустимий час очікування.

Такий підхід дозволяє формулювати задачу матчингу як пошук мінімального вагового максимального матчингу у дводольному графі – класичну задачу дискретної оптимізації, для розв’язання якої існують ефективні алгоритми, зокрема угорський метод або алгоритми на основі пошуку додаткових шляхів [15, 19, 61].

Важливою перевагою цієї моделі є її динамічність: з кожною новою подією (надходження запиту, завершення сесії, зміна локації) граф оновлюється, що дозволяє відтворювати реальну поведінку платформи в умовах постійних змін [41]. Крім того, модель легко узагальнюється на випадки з обмеженою пропускною здатністю, часовими вікнами або пріоритетами, що робить її гнучким інструментом для аналізу сучасних цифрових сервісів [40, 46].

Запропонована мережева модель цифрової платформи формалізується у вигляді динамічного зваженого дводольного графа, структура якого безпосередньо відображає реальні процеси взаємодії між учасниками двобічного ринку. Множина вершин графа розбивається на дві неперетинні підмножини: перша підмножина містить активні запити споживачів, кожен з яких характеризується просторовою локацією, максимально допустимим часом очікування та індивідуальним пріоритетом; друга підмножина складається з доступних провайдерів послуг, для яких задано поточну географічну позицію, рівень завантаження, репутаційний рейтинг та обмеження на тривалість робочої сесії.

Ребра графа визначають допустимі пари «споживач–провайдер», причому наявність ребра між конкретною вершиною з першої множини та вершиною з другої множини встановлюється за умови виконання системи обмежень. Просторове обмеження вимагає, щоб відстань між локацією запиту та поточною позицією провайдера не перевищувала заданий радіус обслуговування, що гарантує фізичну можливість надання послуги. Часове обмеження передбачає, що очікуваний час досягнення клієнта, розрахований на основі відстані та середньої швидкості переміщення, має бути меншим за індивідуально допустимий поріг часу очікування для даного запиту. Додатково можуть застосовуватися обмеження сумісності, які виключають парування за типом послуги, мовою спілкування або іншими специфічними критеріями.

Вагова функція, визначена на множині ребер, інтегрує кілька критеріїв якості парування в єдиний скалярний показник. До складу ваги входить нормалізований час очікування, відстань переміщення, різниця між поточним завантаженням провайдера та бажаним рівнем рівномірності, а також репутаційний рейтинг виконавця. Таке багатокритеріальне зважування дозволяє формалізувати компроміс між оперативною ефективністю, справедливістю розподілу навантаження та якістю обслуговування, що є ключовою особливістю запропонованого підходу.

Динамічна природа моделі реалізується через механізм он-лайн оновлення структури графа у відповідь на події реального часу. Надходження нового запиту ініціює додавання відповідної вершини до множини споживачів та побудову нових ребер до всіх провайдерів, що задовольняють просторово-часовим обмеженням. Завершення сесії обслуговування або зміна статусу провайдера призводить до видалення або тимчасової деактивації відповідної вершини, а також до перерахунку ваг суміжних ребер. Зміна географічної позиції учасника вимагає оновлення множини допустимих ребер та переоцінки їхніх ваг, що забезпечує адекватність моделі поточному стану системи.

Така формалізація має кілька важливих переваг для практичної реалізації. По-перше, фільтрація недопустимих ребер на етапі побудови графа значно скорочує простір пошуку: у типових сценаріях міської платформи лише 15–25 % усіх можливих пар задовольняють одночасно просторові та часові обмеження, що робить задачу обчислювально придатною навіть для точних методів оптимізації. По-друге, модульна структура моделі дозволяє легко інтегрувати додаткові обмеження або критерії якості без перебудови всієї архітектури алгоритму. По-третє, явне представлення обмежень у вигляді структури графа забезпечує прозорість прийняття рішень та полегшує верифікацію коректності роботи системи.

Важливо підкреслити, що запропонована модель не припускає повної інформації про стан системи: репутаційні оцінки можуть оновлюватися стохастично після кожної транзакції, а часові характеристики можуть містити шум, що моделює непередбачуваність зовнішніх факторів. Це робить модель придатною не лише для офлайн-планування, а й для онлайн-адаптації, що є критичним для сучасних цифрових платформ, які функціонують у високодинамічному середовищі. Подібні підходи до моделювання взаємодії в реальному часі вже застосовуються в логістичних та транспортних системах, зокрема в контексті розподілу завдань у цифрових екосистемах, що підтверджує практичну цінність запропонованої формалізації.

Подібні підходи, що інтегрують системний аналіз та багатокритеріальну оптимізацію [17, 23, 29], вже застосовуються в логістичних та транспортних платформах, зокрема в контексті розподілу завдань у реальному часі [11, 30]. Використання такої моделі забезпечує математичне підґрунтя для розробки стійких алгоритмів в умовах динамічного українського ринку [20]. Врахування географічного розташування учасників та ймовірнісної природи їхньої локалізації ґрунтується на методах стохастичної геометрії, які дозволяють формалізувати просторову невизначеність у задачах матчингу [62].

2.2. Динамічна модель залучення учасників на основі марківських ланцюгів або систем диференціальних рівнянь із зворотним зв'язком

Для опису динаміки залучення та утримання учасників двобічної цифрової платформи доцільно застосувати гібридну модель, що поєднує неперервний опис загальної чисельності учасників із дискретним описом їхніх станів. Основу моделі становить система нелінійних диференціальних рівнянь із зворотним зв'язком, яка узагальнює класичну модель «хижак–здобич» (Лотки–Вольтерра [63]), що є типовим підходом для моделювання еволюційної динаміки в іграх та популяціях [41, 64, 65, 66]. Нехай $x(t)$ – кількість активних споживачів, $y(t)$ – кількість активних провайдерів у момент t . Тоді динаміка системи описується рівняннями:

$$\begin{cases} \dot{x}\,(t) = \alpha_x \cdot y_t \cdot x(t) - \beta_x \ \cdot x(t) + \ \gamma_x \\ \dot{y}\,(t) = \alpha_y \cdot x_t \cdot y(t) - \beta_y \ \cdot y(t) + \ \gamma_y \end{cases}, \qquad (2.2)$$

де:

$a_x, \alpha_y > 0$ – коефіцієнти непрямих мережевих ефектів (залучення нових учасників прискорюється за наявності іншої сторони) [6, 7],

$\beta_x, \beta_y > 0$ – коефіцієнти відтоку (наприклад, через незадоволеність, конкуренцію) [40],

$\gamma_x, \gamma_y \geq 0$ – зовнішні потоки (маркетингові заходи, сезонні ефекти).

Перші доданки в обох рівняннях відображають непрямі мережеві ефекти, другі – затухання активності, треті – зовнішнє стимулювання. Така система має нетривіальну рівновагу, стійкість якої може бути проаналізована методами теорії катастроф або лінеаризації [17, 41, 66].

Чисельне моделювання системи (2.2) підтверджує критичну роль мережевих ефектів та часових затримок у формуванні стійкого режиму функціонування платформи. За наявності непрямих мережевих ефектів система швидко досягає асимптотично стійкої рівноваги з високим рівнем активних учасників: 85–90 осіб для кожної з груп. Це пояснюється позитивним зворотним зв'язком: зростання кількості провайдерів підвищує привабливість платформи для споживачів, і навпаки.

У сценарії без урахування мережевих ефектів система не здатна подолати поріг критичної маси та залишається в нестійкому стані з низьким рівнем активності (30–40 осіб), що відповідає так званій «смертельній зоні» функціонування двобічних платформ.

Особливу увагу слід приділити впливу часової затримки (ретардації) у реакції учасників на зміни стану системи. При введенні запізнення (типові значення для міських транспортних платформ становлять 15–45 хв.) у динаміці спостерігаються незатухаючі коливання навколо точки рівноваги. Це свідчить про втрату асимптотичної стійкості внаслідок біфуркації Хопфа та підвищує ризик колапсу платформи при зовнішніх збуреннях.

Отримані результати обґрунтовують необхідність включення динамічних регуляторів у систему управління платформою для компенсації ефектів ретардації, а також підтверджують доцільність використання запропонованої моделі для прогнозування довгострокової стійкості цифрових екосистем.

Для уточнення моделі на мікрорівні вводиться дискретна компонента – неперервний у часі марківський ланцюг із станами: неактивний, новачок, активний, відток. Ймовірності переходів між станами залежать від тривалості попереднього стану, завантаження системи (наприклад, високий час очікування збільшує ймовірність переходу у «відток»), особистої історії (наприклад, повторне підключення після перерви). Такий підхід спирається на апарат теорії марківських процесів і дозволяє моделювати гетерогенну поведінку користувачів, яку не можна охопити лише неперервними рівняннями [40].

Для забезпечення адекватності моделі реальним ринковим процесам, коефіцієнти інтенсивності притоку користувачів та коефіцієнти відтоку не повинні розглядатися як константи. Вони є функціями від цінових параметрів платформи (комісій, абонплат). Введемо p_c та p_s як вартість доступу до послуг платформи для споживачів та постачальників відповідно. Тоді:

- Функція відтоку, інтенсивність виходу користувачів із системи прямо залежить від цінового навантаження. Пропонується використання логістичної або експоненціальної апроксимації:

$$v_i(p_i) = v_i^0 \cdot e^{\gamma i P i}, \tag{2.3}$$

де v_i^0 – базовий рівень відтоку при нульовій вартості, а $\gamma_i > 0$ – коефіцієнт чутливості конкретної групи користувачів до ціни.

- Функція залучення, швидкість притоку нових учасників обернено залежить від ціни:

$$\alpha_i(p_i) = \alpha_i^{max} \cdot \left(1 - \frac{p_i}{p_i^{max}}\right), \tag{2.4}$$

де p_i^{max}– критична ціна, при якій притік нових користувачів припиняється.

Інтеграція цих залежностей у систему рівнянь дозволяє перейти від простого аналізу стійкості до задачі оптимального керування. Таким чином, платформа може знайти такий вектор цін $P = (p_c, p_s)$, який мінімізує відтік та забезпечує стабільне зростання мережевих ефектів навіть за наявності зовнішніх коливань ринку [44].

Таблиця 2.1 Калібровані параметри

Параметр	Позначення	Фізичний зміст	Значення	Одиниці виміру	Джерело калібрування
Коефіцієнт внутрішнього зростання споживачів	α_1	Інтенсивність залучення нових споживачів за рахунок маркетингу при відсутності провайдерів	0,75–1,25	$год^{-1}$	Емпіричні дані Uber [68]
Коефіцієнт внутрішнього зростання провайдерів	α_2	Інтенсивність залучення нових провайдерів (водіїв, кур'єрів) за рахунок партнерських програм та економічних стимулів при відсутності споживачів	0,45–0,85	$год^{-1}$	Дослідження платформ доставки (Glovo, Bolt Food)
Коефіцієнт зворотного зв'язку споживачів	β_1	Інтенсивність відтоку споживачів через низьку якість сервісу (довге очікування, відсутність провайдерів)	0,012–0,022	$(особа·год)^{-1}$	Модель відтоку клієнтів [6];
Коефіцієнт зворотного зв'язку провайдерів	β_2	Інтенсивність відтоку провайдерів через низьку завантаженість та нерентабельність роботи	0,008–0,018	$(особа·год)^{-1}$	Дослідження завантаженості водіїв Uber [69]; дані оператора [70]
Інтенсивність переходу «новачок → активний» (споживачі)	$\lambda_1^{(1)}$	Інтенсивність переходу споживача зі стану «новачок» до стану «активний користувач» після першого успішного замовлення	0,35–0,65	$год^{-1}$	Дані щодо траєкторії взаємодії користувачів із платформою; дані про повторні замовлення клієнтів
Інтенсивність переходу «активний → лояльний» (споживачі)	$\lambda_1^{(2)}$	Інтенсивність формування лояльності (≥5 замовлень на місяць) серед активних споживачів	0,15–0,30	$день^{-1}$	Модель репутаційних систем [71]
Інтенсивність переходу «новачок → активний» (провайдери)	$\lambda_2^{(1)}$	Інтенсивність переходу провайдера зі стану «новачок» до стану «активний» після завершення адаптації на платформі та перших замовлень	0,25–0,55	$год^{-1}$	Результати аналізу процесів адаптації нових виконавців [72]
Інтенсивність переходу «активний → експерт» (провайдери)	$\lambda_2^{(2)}$	Інтенсивність переходу до стану «експерт» (висока оцінка, стабільна активність) серед активних провайдерів	0,10–0,25	$день^{-1}$	Модель репутаційних систем [71]
Часовий лаг реакції системи	τ	Середній час між зміною умов на платформі (наприклад, зростання попиту) та відповідною реакцією учасників (залучення нових провайдерів)	15–45	хв	Емпіричні вимірювання часу реакції ринку [69]
Коефіцієнт якості зв'язків	γ	Вага якості зв'язків (час доїзду, репутація) у формуванні мережевих ефектів	0,6–0,9	безрозмірний	Калібрування на основі кореляції якості матчингу та утримання клієнтів

Важливою особливістю моделі є зворотний зв'язок між структурою (графом з розділу 2.1) і динамікою: наприклад, висока нерівномірність завантаження (див. розділ 1.4) підвищує β_y, що призводить до прискореного відтоку провайдерів і, відповідно, до зниження $x(t)$ через послаблення мережевих ефектів. Таким чином, модель узгоджується з загальною концепцією дисертації, де структура, динаміка та оптимізація розглядаються в єдиній системі [11, 30].

2.3. Модель матчингу попиту та пропозиції з обмеженнями

Матчинг попиту та пропозиції є центральним механізмом функціонування двобічних цифрових платформ послуг, від ефективності якого залежать якість обслуговування користувачів, завантаження провайдерів, загальний обсяг транзакцій і стійкість системи в цілому. На відміну від класичних задач призначення, що розглядаються в операційних дослідженнях [15], матчинг на цифрових платформах відбувається в умовах динамічного середовища, де запити надходять асинхронно, а провайдери мають обмежену пропускну здатність, часові вікна доступності та просторову локалізацію. Це ускладнює застосування стандартних статичних моделей і вимагає побудови нової, більш адекватної формалізації.

У запропонованій моделі матчинг формулюється як багатокритеріальна задача дискретної оптимізації з часовими, просторовими та репутаційними обмеженнями, що дозволяє одночасно враховувати кілька ключових показників ефективності. Так, для прикладу, при розгляді задачі замовлень на перевезення у момент часу t на платформі надійшло m запитів від споживачів, кожен з яких характеризується локацією $x_i \in R^2$, максимальним прийнятним часом очікування τ_i^{max}, а також вагою пріоритету $w_i \geq 0$ (наприклад, вища для преміум-користувачів або термінових послуг). Водночас доступно n провайдерів, кожен з яких має поточну координату y_j, оцінку репутації $r_j \in [0,1]$, завантаження $\delta_j \in [0,1]$ (де 0 – вільний, 1 – повністю зайнятий), а також максимальну тривалість сесії T_j^{max}.

Повна математична формалізація задачі багатокритеріального матчингу систематизована у табл. 2.2–2.4. Таблиця 2.2 визначає простір рішень, таблиця 2.3 містить вхідні параметри, таблиця 2.4 задає систему обмежень.

Таблиця 2.2 Множини та змінні рішення

Позначення	**Математичний вираз**	**Пояснення**
U	$U = \{u_1, \dots, u_m\}$	Множина активних споживачів (запитів)
V	$V = \{u_1, \dots, u_n\}$	Множина доступних провайдерів (ресурсів)
E	$E \subseteq U \times V$	Множина допустимих зв'язків (ребер графа)
x_{ij}	$x_{ij} \in \{0,1\}$	Бінарна змінна: $x_{ij} = 1$, якщо споживач u_i призначений провайдеру v_j

Таблиця 2.3 Параметри моделі

Позначення	**Математичний вираз**	**Пояснення**
d_{ij}	≥ 0 (км)	Евклідова відстань між споживачем u_i та провайдером v_j
t_{ij}	≥ 0 (хв)	Очікуваний час доїзду ($t_{ij} = \frac{d_{ij}}{v_{\text{сер}}}$)
T_i	≥ 0 (хв)	Максимально допустимий час очікування для споживача
D_{max}	≥ 0 (км)	Гранична відстань для формування допустимого зв'язку
L_j	[0,1]	Поточне завантаження провайдера j
L_j^{max}	> 0	Максимально допустиме завантаження провайдер j
R_j	[0,5]	Репутаційний рейтинг провайдера j
P_i	≥ 0	Пріоритет споживача i (наприклад, преміум-статус)

Таблиця 2.4 Система обмежень

Назва обмеження	**Математичний вираз**	**Пояснення**
Призначення споживача	$\sum_{j \in U} x_{ij} \leq 1, \quad \forall\, i \in U$	Кожен споживач призначається максимум одному провайдеру
Завантаження провайдера	$\sum_{i \in U} x_{ij} \leq L_j^{max}, \quad \forall\, j \in U$	Сумарне навантаження не перевищує технічний потенціал
Часові вікна	$t_{ij} \cdot x_{ij} \leq T_i, \quad \forall\, (i,j) \in E$	Час очікування не перевищує індивідуальний поріг
Геопросторові	$d_{ij} \cdot x_{ij} \leq D_{max}, \quad \forall\, (i,j) \in E$	Відстань не перевищує допустимий радіус обслуговування
Сумісність	$x_{ij} = 0,$ якщо i, j несумісні	Виключення пар, що не відповідають типу послуги

Математична модель задачі матчингу формулюється як багатокритеріальна задача дискретної оптимізації на динамічному дводольному графі $G = (U, V, E)$. Повна формалізація змінних, обмежень та цільових функцій систематизована в табл. 2.2-2.4 Ключовим аспектом моделі є врахування чотирьох конфліктуючих критеріїв: (1) мінімізація часу очікування, (2) балансування завантаження провайдерів, (3) максимізація якості сервісу через репутаційні рейтинги, та (4) максимізація кількості задоволених запитів. Обмеження забезпечують виконання часових та геопросторових вимог платформи, тоді як обмеження гарантує сумісність учасників. Векторна постановка дозволяє оператору платформи налаштовувати ваги w_k залежно від поточних бізнес-пріоритетів (наприклад, під час пікового навантаження пріоритет надається критерію f_4 , а в період низького попиту – критерію f_3

Припустимо, що швидкість переміщення провайдера вважається сталою величиною v , а час досягнення клієнта і провайдером j наближено дорівнює

$$t_{ij} = \frac{\| \mathrm{x}_i - y_j \|}{v}. \tag{2.5}$$

Тоді зв'язок (i, j) вважається припустимим, якщо

$$t_{ij} \leq \tau_i^{max} \text{ та } \delta_j + 1 \leq L_{max}, \tag{2.6}$$

де L_{max} – максимально допустиме одночасне завантаження (наприклад, 1 для строго послідовного обслуговування, або більше для мультизадачних моделей, таких як виконання доставки по маршруту).

Матчинг $M \subseteq \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ називається допустимим, якщо для будь-якого провайдера j виконується умова

$$\sum_{i:(i,j)\in M} t_{ij} + T_i^{servise} \leq T_j^{max}, \tag{2.7}$$

а також жоден клієнт не призначається більш ніж одному провайдеру.

Введемо вектор цільових функцій $F(M) = (F_1(M), F_2(M), F_3(M))$,

де:

$F_1(M) = \sum_{(i,j)\in M} w_{ij} \cdot t_{ij}$ – зважений час очікування, який потрібно мінімізувати;

$F_2(M) = \max_j \delta_j^{(M)}$ – максимальне завантаження провайдерів, яке потрібно мінімізувати;

$F_3(M) = \sum_{(i,j)\in M} r_j$ – сумарна репутація успішних парувань, яку потрібно максимізувати;

$\delta_j^{(M)}$ – завантаження провайдера j після виконання матчингу M. Замість функції $F_3(M)$ зручніше розглядати $\widetilde{F_3}\,(M) = -F_3(M)$ і зважену агрегацію

$$F(M) = \alpha_1 F_1(M) + \alpha_2 F_2(M) + \alpha_2 \widetilde{F_3}\,(M),\ \alpha_k \geq 0\,,\ \sum \alpha_k = 1. \qquad (2.8)$$

Поставлена задача полягає у пошуку допустимого матчингу M^*, що мінімізує $F(M)$.

На відміну від класичного угорського методу для однокритеріальної задачі призначення [24], така інтерпретація дозволяє формалізувати компроміс між ефективністю, справедливістю та якістю сервісу [17]. Зокрема, у [11] показано, що виключення обмеження на рівномірність завантаження F_2 призводить до формування «ядропровайдерів» – невеликої групи високорейтингових учасників, які несуть основне навантаження, що в кінцевому підсумку підвищує їхній рівень відтоку. Тому включення F_2 у цільову функцію є не лише технічним прийомом, а науково обґрунтованою стратегією підвищення довгострокової стійкості платформи.

Обмеження на просторову та часову сумісність дозволяють відкинути неперспективні ребра ще на етапі побудови графа (див. розділ 2.1), що істотно знижує розмірність задачі [16]. Подібні підходи до фільтрації допустимих рішень на основі логістичних обмежень широко застосовуються в теорії управління ланцюгами постачання [73]. Зокрема, у реальних сценаріях типової міської платформи (наприклад, доставка їжі або пасажирські перевезення) кількість припустимих пар (i, j) становить лише 15–25 % від загального числа можливих комбінацій, що робить задачу обчислювально придатною навіть для використання точних методів (наприклад, модифікованого алгоритму Куна–Мункреса [74]) у випадку до 500–700 запитів одночасно.

Механізм фільтрації допустимих парувань базується на системі обмежень, які відсікають неперспективні зв'язки ще на етапі побудови графа взаємодії. Розглянемо дію цих обмежень на конкретному прикладі.

Часові обмеження визначають допустиме вікно обслуговування для кожного запиту. Нехай споживач ініціював запит у момент часу $t_0 = 0$ хв. Якщо максимальний допустимий час очікування становить $T_i = 25$ хв, а мінімальний технологічний час підготовки (наприклад, час на підтвердження та початок обслуговування) становить 10 хв, то допустимий інтервал виконання запиту визначається як [10; 25] хв від моменту надходження. Це означає, що провайдер, який може розпочати обслуговування раніше 10-ї хвилини, технічно не готовий до виконання замовлення (наприклад, через зайнятість на попередньому завданні), а провайдер, який прибуде пізніше 25-ї хвилини, порушує вимоги якості сервісу. Таким чином, із множини доступних провайдерів відбираються лише ті, для яких очікуваний час початку обслуговування t_j задовольняє умову $10 \le t_j \le 25$.

Геопросторові обмеження визначають максимальну відстань, на якій провайдер може ефективно обслуговувати запит. Нехай для даного типу послуг встановлено граничний радіус обслуговування $D_{max} = 3$ км. Це означає, що із множини всіх активних провайдерів допустимими для призначення вважаються лише ті, поточна географічна позиція яких знаходиться на відстані $d_i \le 3$ км від локації запиту. Таке обмеження має подвійне обґрунтування: по-перше, воно гарантує фізичну можливість надання послуги за прийнятний час (враховуючи середню швидкість переміщення); по-друге, воно мінімізує операційні витрати провайдера (наприклад, витрати пального або час простою під час переміщення).

Комбінована дія цих обмежень призводить до суттєвого скорочення простору пошуку, у типових сценаріях міської платформи лише 15–25 % усіх можливих пар «споживач–провайдер» задовольняють одночасно часовим та геопросторовим вимогам. Це не лише підвищує обчислювальну ефективність алгоритму матчингу, але й забезпечує якість рішень, оскільки виключаються явно неефективні призначення. Сформована таким чином множина допустимих ребер E (див. табл. 2.2) стає основою для подальшої багатокритеріальної оптимізації.

Для великих масштабів (наприклад, у пікові години) пропонується гібридний підхід: спочатку – кластеризація запитів за географічним принципом (з використанням методу DBSCAN або мережевих спільнот [16]), а потім – локальне розв’язання задачі матчингу всередині кожного кластера. Така декомпозиція не лише прискорює обчислення, а й покращує якість рішення, оскільки враховує локальну густину попиту та пропозиції. Попередні чисельні експерименти, описані в [30], підтверджують, що такий підхід зменшує середній час очікування на 18–22 % порівняно з глобальним алгоритмом послідовного вибору (або послідовним евристичним алгоритмом), за умови збереження дисперсії завантаження на рівні не вище 0,15.

Важливо підкреслити, що запропонована модель не припускає повної інформації: репутаційні оцінки r_j можуть оновлюватися стохастично після кожної транзакції (наприклад, за формулою експоненційного згладжування), а часові характеристики – містити шум, що моделює непередбачуваність трафіку або погодних умов. Це робить модель придатною не лише для офлайн-планування, а й для онлайн-адаптації, що є критичним для сучасних платформ.

Таким чином, модель матчингу, запропонована в цьому розділі, узагальнює класичні підходи, інтегруючи структурні, часові, просторові та поведінкові фактори в єдину багатокритеріальну оптимізаційну рамку. Саме така інтеграція забезпечує її наукову новизну та практичну цінність, дозволяючи не просто максимізувати обсяг транзакцій, а забезпечувати збалансовану, стійку та справедливу роботу платформи в умовах реального світу.

2.4. Врахування прямих і непрямих мережевих ефектів у моделях

Мережеві ефекти є фундаментальною рисою двобічних цифрових платформ і визначають їхню динаміку, стійкість та стратегічну поведінку [17]. На відміну від традиційних ринків, де корисність товару для споживача залежить від його власних характеристик, на платформах цінність сервісу для кожного учасника безпосередньо зростає із збільшенням кількості, якості та активності інших учасників. Це явище, вперше формалізоване в роботах Ж.-Ш. Роше та Ж. Тіроля, а також детально розвинене в подальших дослідженнях Д. Еванса, стало основою сучасного розуміння двобічних ринків. Дж. Паркер, М. .Ван Алстайн і С. Чоударі доповнили цю картину, показавши, що мережеві ефекти лежать в основі трансформації економіки платформ [44], визначаючи не лише поведінку користувачів, а й стратегічні рішення операторів.

Однак у більшості математичних моделей ці ефекти розглядаються лише на рівні агрегованих потоків (наприклад в системній динаміці [40]), що обмежує можливість аналізу мікродинаміки і впливу на конкретні рішення – зокрема, на матчинг або розподіл завантаження. У цьому розділі пропонується узагальнений підхід, у якому мережеві ефекти вбудовані безпосередньо в структурну (розділ 2.1) та динамічну (розділ 2.2) моделі, що забезпечує їхню внутрішню узгодженість та підвищує прогностичну здатність системи.

Прямі мережеві ефекти виникають усередині однієї групи учасників і відображають зростання корисності для кожного індивіда із зростанням кількості учасників у цій групі. Хоча в чистому вигляді вони характерніші для однобічних платформ (наприклад, соціальних мереж), у двобічних системах вони проявляються опосередковано – зокрема, через щільність взаємодій та конкуренцію за увагу. Наприклад, на фриланс-платформі збільшення кількості клієнтів підвищує не лише загальний попит, а й стимулює міжпровайдерну конкуренцію, що у свою чергу, підвищує якість пропозицій і швидкість реакції. Для формалізації цього ефекту вводиться показник локальної щільності попиту навколо провайдера j :

$$\rho_j(t) = \frac{1}{N_j(t)} \sum_{i \in N_j(t)} \big((i, j) \in E\ (t)\big), \tag{2.9}$$

де $N_j(t)$ – множина клієнтів у радіусі R від y_j, а $E(t)$ – множина допустимих ребер у момент t. Величина $\rho_j(t)$ виступає множником у ймовірності переходу «новачок → активний» у марківському ланцюзі (див. розділ 2.2), що дозволяє моделювати самопідживлення активності провайдерів у високопопулярних зонах – підхід, узгоджений із загальними положеннями мережевого аналізу [16] та сучасними підходами до моделювання цифрових екосистем.

Твердження. Показник локальної щільності попиту $\rho_j(t)$, визначений формулою (2.9), задовольняє наступні властивості:

Обмеженість: $0 \leq \rho_j(t) \leq 1$ для будь-якого провайдера $j \in V$ та моменту часу t;

Монотонність: $\rho_j(t)$ є неспадною функцією відносно кількості допустимих ребер у множині $E(t)$;

Інтерпретація: величина $\rho_j(t)$ дорівнює частці клієнтів із множини $N_j(t)$, які можуть бути обслуговані провайдером j у момент часу t.

Доведення. Обмеженість випливає безпосередньо з визначення індикаторної функції $\big((i,j) \in E(t)\big)$, яка набуває значень 0 або 1. Оскільки сума n доданків, кожен з яких не перевищує 1, поділена на $n = N_j(t)$, то отримане значення належить відрізку [0, 1].

Монотонність: при додаванні нового допустимого ребра (i,j) до множини $E(t)$ відповідний доданок у сумі зростає з 0 до 1, що призводить до збільшення $\rho_j(t)$.

За визначенням, чисельник формули (2.9) підраховує кількість клієнтів із $N_j(t)$, для яких існує допустиме ребро до провайдера j, тоді як знаменник містить загальну кількість клієнтів у радіусі R. Їхнє відношення є шуканою часткою.

Наслідок. Показник $\rho_j(t)$ може безпосередньо використовуватися як множник у ймовірнісних моделях переходів між станами марківського ланцюга, зокрема для моделювання впливу локальної щільності попиту на ймовірність переходу провайдера зі стану «новачок» у стан «активний».

Непрямі мережеві ефекти, навпаки, є домінуючими у двобічних платформах і полягають у взаємній залежності між сторонами: зростання кількості провайдерів підвищує якість обслуговування для споживачів (менше часу очікування, вищий вибір), а зростання попиту підвищує дохідність для провайдерів. Класично це відображається в системі диференціальних рівнянь (2.2), де множники α, β задають інтенсивність цих ефектів. Проте така форма не враховує неоднорідності поширення ефектів: наприклад, додавання одного високорейтингового провайдера в малонаселеному районі може мати більший вплив, ніж додавання десяти середніх у центрі міста. Тому у запропонованій моделі непрямий ефект формалізується як функція ваг ребер у дводольному графі:

$$\Phi_{ind}(t) = \frac{1}{|\,\mathrm{E(t)}\,|} \sum_{(i,j)\in E(t)} w_{ij}\,, \tag{2.10}$$

де w_{ij} – вага ребра, визначена в розділі 2.1 (наприклад, $w_{ij} = \lambda_1 t_{ij} + \lambda_2 \left(1 - r_j\right) + \lambda_3 \delta_j$). Тоді коефіцієнти α, β у рівняннях (2.2) перестають бути сталими і стають залежними від стану системи:

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \gamma_1 \cdot \Phi_{ind}(t), \beta(t) = \beta_0 + \gamma_2 \cdot \Phi_{ind}(t)\,, \tag{2.11}$$

де $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ визначають чутливість залучення до якості існуючих зв’язків. Така модифікація дозволяє моделі «відчувати» не просто кількість учасників, а якість їхньої інтеграції в екосистему.

Важливим є те, що ця формалізація узгоджується з розширеним підходом Еванса [36] до аналізу багатосторонніх ринків, де ефекти можуть бути асиметричними та залежати від структури [36]. Крім того, у роботі [11] показано, що ігнорування зворотного зв’язку між якістю матчингу та динамікою залучення призводить до систематичної переоцінки стійкості платформи: у чисельних експериментах моделі з фіксованими α, β прогнозували зростання кількості провайдерів на 23 % за 6 місяців, тоді як емпіричні дані міжнародних платформ [68, 69] та локальних операторів [70], а також модель із змінними коефіцієнтами показували зниження на 7 % через накопичення незадоволених користувачів. Це підтверджує, що адекватне врахування мережевих ефектів вимагає замкнутої системи, де структура графа, динаміка потоків і якість рішень взаємно впливають одне на одного.

Окрему увагу слід приділити асиметрії мережевих ефектів: на багатьох платформах (наприклад, у ринку таксі) непрямий ефект з боку провайдерів на споживачів значно сильніший, ніж зворотний. Це легко моделюється шляхом задання $\gamma_1 \gg \gamma_2$, що відповідає стратегії «спочатку забезпечити покриття, потім – попит». Навпаки, у сегменті експертних послуг (наприклад, Upwork для висококваліфікованих фахівців) домінує зворотний ефект: клієнти приходять за конкретними провайдерами, тому $\beta(t)$ має більший вплив на динаміку $P(t)$. Така гнучкість у формалізації є ще однією перевагою запропонованого підходу порівняно з класичними моделями, які припускають симетрію ефектів [38, 75].

Також важливо враховувати часові затримки у прояві мережевих ефектів. Наприклад, збільшення кількості провайдерів не веде до миттєвого зростання потоку клієнтів, потрібен час на усвідомлення покращення сервісу, поширення репутації, маркетингові кампанії. Для цього в систему (2.2) вводяться ретардовані аргументи:

$$\frac{dC}{dt} = \alpha(t) \cdot P(t - \tau_P) \cdot C(t) - \mu_C C(t) + \nu_C(t), \tag{2.12}$$

де $\tau_P > 0$ – характерний час реакції споживачів на зміну кількості провайдерів. Згідно з [40], типові значення τ_P для міських транспортних платформ становлять 3–7 днів, тоді як для B2B-платформ – 14–30 днів (соціальні зміни). Включення затримок значно покращує згоду моделі з емпіричними траєкторіями, особливо в умовах стресових збурень (наприклад, після маркетингової акції або регуляторного втручання).

Додатково у моделі враховано вплив непрямих ефектів на рівень рівноваги, яка може бути проаналізована за допомогою методів теорії катастроф або лінеаризації, що робить підхід співставним із сучасними дослідженнями в галузі динамічних систем.

Функціональна залежність коефіцієнтів мережевих ефектів від якості зв'язків може бути представлена різними математичними формами, вибір яких залежить від специфіки платформи та емпіричних даних.

Лінійна залежність характеризується постійним темпом приросту коефіцієнтів мережевих ефектів зі збільшенням якості зв'язків. Ця форма доцільна для платформ зі стабільною динамікою взаємодії, де кожна одиниця покращення якості (наприклад, зменшення часу очікування на 1 хвилину або підвищення рейтингу провайдера на 0,1 бала) дає пропорційний внесок у залучення нових учасників.

Квадратична залежність моделює прискорене зростання коефіцієнтів, що відповідає ситуаціям, коли мережеві ефекти мають кумулятивний характер. Така форма характерна для платформ із сильною соціальною складовою (наприклад, професійні спільноти або освітні платформи), де покращення якості зв'язків не лише безпосередньо впливає на залучення, а й запускає додаткові механізми особистих рекомендацій та вірусного поширення.

Логарифмічна залежність відображає ефект насичення, при низьких значеннях якості зв'язків спостерігається швидкий приріст коефіцієнтів, проте зі збільшенням якості темп приросту уповільнюється. Це узгоджується з емпіричними даними про сповільнення мережевого ефекту при надмірно високій якості сервісу, коли додаткові покращення стають малопомітними для користувачів. Така форма доцільна для зрілих платформ, що досягли високого рівня сервісу.

Ступінчаста залежність моделює наявність критичних порогів якості, при переході через які спостерігається різка зміна інтенсивності мережевих ефектів. Наприклад, досягнення середнього рейтингу провайдерів 4,5 зірки (із 5) може відкрити доступ до нових сегментів клієнтів (преміум-користувачів), що призводить до стрімкого зростання залучення. Така форма характерна для платформ із чіткою сегментацією користувачів або регуляторними обмеженнями.

Вибір адекватної функціональної форми має критичне значення для точності прогнозування динаміки платформи. У даній роботі запропоновано підхід, що дозволяє оператору платформи калібрувати параметри функції на основі емпіричних даних, використовуючи методи нелінійної регресії або байєсівського оновлення. Це забезпечує адаптивність моделі до змін у поведінці користувачів та ринкових умовах.

Таким чином, у цьому розділі запропоновано узагальнену формалізацію прямих і непрямих мережевих ефектів, яка не обмежується макрорівнем, а пронизує всі шари моделі – від структури графа до динаміки потоків і якості рішень. Ця інтеграція дозволяє не лише пояснювати спостережувані явища (наприклад, «ефект снігової кулі» при запуску платформи або «колапс балансу» за високого відтоку провайдерів), а й прогнозувати кількісні наслідки стратегічних рішень – зокрема, вплив зміни алгоритму матчингу на довгострокову стійкість екосистеми. Саме така глибина формалізації і становить наукову новизну даного підходу.

2.5. Аналіз властивостей моделей: існування розв'язку, стійкість, масштабованість

Формалізовані в попередніх підрозділах моделі утворюють замкнену систему, де структурні, часові та поведінкові компоненти взаємно впливають одна на одну. Проте лише наявність математичного опису не гарантує придатності моделі для аналізу або практичного застосування. Ключовим етапом є строга перевірка її властивостей: чи існує розв'язок, чи є він стійким до збурень, і чи зберігає модель свої якісні характеристики при зростанні масштабу. Ці три аспекти – існування, стійкість, масштабованість – визначають не лише теоретичну обґрунтованість підходу, але й його придатність для реалізації в цифрових платформах, які функціонують у динамічному, шумному та швидкозростаючому середовищі.

Існування розв'язку розглядається на двох рівнях. По-перше, для задачі матчингу (2.3) існування допустимого розв'язку гарантоване за умови, що дводольний граф $G(t) = \big(U(t) \cup V(t), E(t)\big)$ має хоча б один досконалий підграф, тобто існує хоча б одне часткове парування, що задовольняє всі накладені обмеження. У загальному випадку ця умова еквівалентна виконанню умови Галла [21]: для будь-якої підмножини клієнтів $S \subseteq U(t)$ кількість сумісних провайдерів $| N(S) |$ не менша за $| S |$, де $N(S)$ – множина сусідів S у графі $G(t)$. На практиці ця умова часто порушується через часові та просторові обмеження, особливо в пікові періоди. Проте в рамках запропонованої моделі допускається частковий матчинг – призначення лише підмножини запитів, що максимізує зважену цільову функцію $F(M)$, і для нього розв'язок існує завжди, оскільки множина допустимих матчингів є скінченною та непорожньою (порожній матчинг завжди допустимий). Це забезпечує коректність постановки задачі навіть у випадках різкого дисбалансу попиту та пропозиції – ситуації, характерної для реальних платформ [11].

По-друге, для динамічної системи (2.2) існування розв'язку випливає з класичних теорем теорії звичайних диференціальних рівнянь. Праві частини рівнянь є неперервними функціями стану $\left(x(t), y(t)\right)$, а в разі введення ретардації – кусково-неперервними з обмеженою затримкою. За теоремою Пікара–Ліндельофа [41, 67], для будь-якого початкового стану $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$ існує єдиний локальний розв'язок, а оскільки праві частини мають поліноміальний зростання, розв'язок продовжується на будь-який скінченний проміжок часу. Таким чином, модель динаміки залучення коректна з математичної точки зору навіть при змінних коефіцієнтах мережевих ефектів (як у розділі 2.4). Загальні теореми про нерухому точку, зокрема теорема Тарського для впорядкованих множин [76], забезпечують теоретичне підґрунтя для доведення існування рівноважних станів у структурних та дискретних моделях платформи.

Стійкість розглядається як властивість системи повертатися до рівноважного стану після зовнішніх збурень – наприклад, раптового сплеску попиту, відтоку провайдерів або зміни алгоритму матчингу. Для динамічної системи (2.2) рівновага (x^* , y^*) визначається з умови нульової похідної. Лінеаризація системи навколо цієї точки дає матрицю Якобі [77]

$$J = \begin{bmatrix} \alpha y^* - \mu & \alpha x^* \\ \beta y^* & \beta x^* - \nu \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

власні значення якої визначають характер рівноваги. У разі $\alpha\beta x^* y^* < \mu\nu$ обидва власні значення мають від'ємну дійсну частину – рівновага асимптотично стійка. Ця умова інтерпретується як баланс між інтенсивністю мережевих ефектів і швидкістю відтоку, що узгоджується з висновками [40] щодо критичної ролі «затримки зворотного зв'язку» у попередженні коливань. Зокрема, введення ретардації $\tau > 0$ може спричинити втрату стійкості через біфуркацію Хопфа [78], що пояснює спостережувані в реальних платформах періодичні цикли «набору → перенавантаження → відтоку» [41]. У роботі [30] показано, що впровадження балансуючого члена у цільову функцію $F(M)$(а саме, мінімізація L_{max}) не лише покращує справедливість, але й опосередковано підвищує стійкість динамічної системи, оскільки знижує ν – коефіцієнт відтоку провайдерів через виснаження.

Щодо стійкості задачі матчингу, вона аналізується в термінах робастності: чи зберігається якість розв’язку при збуренні вхідних даних – наприклад, похибці в оцінці часу доїзду або стохастичній зміні репутаційних оцінок. Оскільки цільова функція $F(M)$ є функцією, що задовольняє умову Ліпшица за вагами ребер, а множина допустимих матчингів дискретна і скінченна, можна оцінити верхню межу зміни значення F при додаванні шуму ε до кожної ваги:

$$| F(M_{\varepsilon}) - F(M_0) | \leq K \cdot \varepsilon \cdot | M |, \qquad (2.14)$$

де $K = \max\{w_1, w_2, w_3\}$ – максимальна вага критерію, а $| M |$ – розмір матчингу. Це означає, що запропонована модель є робастною у відношенні до помірних збурень, що підтверджено чисельними експериментами в [11].

Масштабованість є критичною властивістю для будь-якої моделі, призначеної для застосування в реальних цифрових платформах. У рамках запропонованого підходу вона забезпечується на кількох рівнях. По-перше, мережева модель (2.1) дозволяє ефективно скорочувати простір пошуку шляхом фільтрації недопустимих ребер ще до побудови графа – на практиці це зменшує кількість розглядуваних пар на 75–85 % [11]. По-друге, гібридна стратегія декомпозиції (геокластеризація + локальне розв’язання) забезпечує близьку до лінійної складність $O\ (n \log n + k \cdot m^3)$, де n – загальна кількість запитів, k – кількість кластерів, а m – середній розмір кластера. Завдяки тому, що $m \ll n$ у реальних умовах (наприклад, $m \approx 50$ при $n = 5000$), цей підхід дозволяє обробляти пікові навантаження за час, придатний для онлайн-застосування (менше 200 мс на ітерацію) [79]. По-третє, динамічна система (2.2) є низькорозмірною (лише дві змінні), а отже, її симуляція не створює обчислювального «вузького місця», навіть коли використовується в петлі керування. У сукупності ці риси роблять модель придатною не лише для аналітичних досліджень, але й для впровадження в інженерні рішення, зокрема в умовах обмежених ресурсів [80].

Важливо підкреслити, що балансування навантаження не є лише етичною або маркетинговою стратегією – воно має пряме динамічне обґрунтування. Емпіричні дослідження поведінки провайдерів на платформах типу Uber та Bolt [30] показують, що інтенсивність відтоку $\nu(t)$ є нелінійною функцією максимального завантаження:

$$\nu(t) = \nu_0 + \kappa \cdot \left(\max_j L_j(t) - \theta_{crit}\right)_+, \tag{2.15}$$

де $\theta_{crit} \approx 0{,}75$ – критичний поріг, після якого відчуття «перезавантаження» різко зростає, а $\kappa > 0$ – коефіцієнт чутливості. Це означає, що навіть невелика група провайдерів із завантаженням понад 80 % створює диспропорційно великий внесок у загальний відтік.

Твердження. Функція інтенсивності відтоку провайдерів $\nu(t)$, визначена формулою (2.15), має наступні властивості:

- Пороговий характер: При $\max_j L_j(t) \leq \theta_{crit}$ інтенсивність відтоку залишається на базовому рівні $\nu(t) = \nu_0$, що відповідає природному відтоку, не пов'язаному з перевантаженням.
- Нелінійне зростання: При $\max_j L_j(t) > \theta_{crit}$ інтенсивність відтоку зростає лінійно зі швидкістю κ відносно перевищення критичного порогу завантаження.
- Вплив на стійкість системи: Зниження максимального завантаження $\max_j L_j(t)$ шляхом балансування зменшує інтенсивність відтоку $\nu(t)$, що опосередковано підвищує стійкість динамічної системи (2.2) через збереження критичної маси провайдерів.

Доведення. За означенням оператора $(x)_+ = \max(0, x)$, якщо $\max_j L_j(t) - \theta_{crit} \leq 0$, тоді $\left(\max_j L_j(t) - \theta_{crit}\right)_+ = 0$, і формула (2.15) набуває вигляду $\nu(t) =$

$v_0 + \kappa \cdot 0 = v_0$. Якщо $\max_j L_j(t) > \theta_{crit}$, тоді $\left(\max_j L_j(t) - \theta_{crit}\right)_+ = \max_j L_j(t) - \theta_{crit}$, і $v(t) = v_0 + \kappa \cdot \left(\max_j L_j(t) - \theta_{crit}\right)$. Похідна $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\,(\max_{\mathrm{j}} L_j)} = k > 0$, що підтверджує лінійне зростання. Із системи (2.2) випливає, що стійкість рівноваги визначається умовою балансу між коефіцієнтами залучення та відтоку. Зниження $v(t)$ через мінімізацію $\max_j L_j(t)$ зменшує загальний відтік провайдерів, зберігаючи множину V активних учасників. Це підтримує непрямі мережеві ефекти β_1, β_2 та запобігає переходу системи в "смертельну зону" (див. розділ 1.5).

Наслідок. Впровадження обмеження на максимальне завантаження $\theta_{crit} \approx 0.8$ у задачі багатокритеріального матчингу забезпечує зниження інтенсивності відтоку провайдерів на 15–20% порівняно з моделями, що не враховують балансування навантаження.

Запропонований алгоритм матчингу, який мінімізує $F_2 = \max_j L_j$, безпосередньо знижує цей ефект, зменшуючи $v(t)$ і, відповідно, підвищуючи стійкість динамічної системи (2.2). Як показано в чисельних експериментах (розділ 3.5), зниження F_2 з 0,88 до 0,62 призводить до скорочення відтоку на 19 % протягом 30 днів – результат, що узгоджується з даними [40] про роль «локального виснаження» у колапсі платформ.

2.6. Моделювання резильєнтності платформи до зловмисних дій та Sybil-атак

У сучасних цифрових платформах стійкість не може розглядатися лише в термінах динамічної рівноваги – вона повинна включати резильєнтність до зловмисних дій, зокрема Sybil-атак, коли зловмисник створює множину фейкових акаунтів для маніпуляції матчингом, рейтингами або попитом.

Запропонуємо розширення мережевої моделі (розділ 2.1), де кожній вершині v_i приписується довірчий рівень $\tau_i \in [0,1]$, що оновлюється за формулою:

$$\tau_i^{(t+1)} = (1-\eta)\tau_i^{(t)} + \eta \ \cdot I \left(\text{звичайна поведінка}(v_i)\right), \qquad (2.16)$$

де $\eta \in (0,1)$ – швидкість навчання, а I – індикатор узгодженості поведінки зі статистикою здорових користувачів (наприклад, варіація локації, частота транзакцій).

Фейкові акаунти, як правило, демонструють аномальну активність: високу частоту запитів, мінімальну просторову варіацію, координовані дії. Це дозволяє виявляти їх за допомогою методів виявлення спільнот [16] або аномалій у графі [81].

Для забезпечення робастності матчингу вага ребра w_{ij} модифікується:

$$\widetilde{w}_{ij} = w_{ij} +\cdot \ \lambda\left(1 - \tau_j\right), \qquad (2.17)$$

де $\lambda \gg 1$ – штраф за низьку довіру. Це ефективно виключає фейкові провайдери з оптимального матчингу, навіть якщо вони мають високий «рейтинг».

Твердження. Модифікована вага ребра $\widetilde{w}_{ij}$, визначена формулою (2.17), має наступні властивості:

Узгодженість з довірчим рівнем. Якщо $\tau_j = 1$ (повна довіра), тоді $\widetilde{w}_{ij} = w_{ij}$ – вага залишається незмінною; Якщо $\tau_j = 0$ (повна недовіра), тоді $\widetilde{w}_{ij} = w_{ij} + \lambda$ – вводиться максимальний штраф; Для $\tau_j \in (0,1)$ штраф є пропорційним до ступеня недовіри.

Монотонність: Функція $\widetilde{w}_{ij}\left(\tau_j\right)$ є спадною лінійною функцією відносно τ_j з кутовим коефіцієнтом $-\lambda$, що забезпечує передбачуваність покарання за низьку довіру.

Селективність виключення: При $\lambda > \max\limits_{(i,j)\in E} w_{ij} - \min\limits_{(i,j)\in E} w_{ij}$ провайдер із $\tau_j \approx 0$ практично виключається з оптимального матчингу, оскільки його модифікована вага стає домінуючою в цільовій функції.

Збереження структури графа: модифікація не змінює топологію графа $G(t)$, а лише перерозподіляє пріоритети серед допустимих ребер, що дозволяє застосовувати стандартні алгоритми пошуку оптимального матчингу без структурних змін.

Доведення. Безпосередньо випливає з підстановки граничних значень τ_j у формулу (2.17): При $\tau_j = 1 :\ \widetilde{w}_{ij} = w_{ij} + \lambda\,(1-1) = w_{ij}$. При $\tau_j = 0 :\ \widetilde{w}_{ij} = w_{ij} + \lambda\,(1-0) = w_{ij} + \lambda$. При $\tau_j \in (0{,}1)$: доданок $\lambda\big(1-\tau_j\big) \in (0,\lambda)$ є лінійною функцією.

- Похідна $\frac{\partial \widetilde{w}_{ij}}{\partial \tau_j} = -\lambda < 0$ (оскільки $\lambda > 0$ за означенням), що підтверджує строгу спадність. Лінійність випливає з афінної форми запису.
- Нехай задача матчингу полягає у мінімізації сумарної ваги $\sum_{(i,j)\in M} \widetilde{w}_{ij}$. Якщо для провайдера j виконується $\tau_j \approx 0$, тоді $\widetilde{w}_{ij} = w_{ij} + \lambda$. При умові $\lambda > \Delta w_{\max}$ де $\Delta w_{\max} = \max w_{ij} - \min w_{ij}$, будь-яке призначення такому провайдеру збільшує цільову функцію більше, ніж альтернативне призначення будь-якому іншому провайдеру з $\tau_k > 0$. Отже, оптимальний матчинг уникатиме таких ребер, якщо існує хоча б одна альтернатива.
- Оскільки формула (2.17) змінює лише вагову функцію $w : E \to \mathbb{R}$, а не множини вершин U, V або множину ребер E, топологічна структура графа $G(t) = (U, V, E)$ залишається незмінною. Це дозволяє застосовувати будь-які алгоритми на графах (угорський метод, пошук потоку мінімальної вартості тощо) без модифікації їхньої логіки.

Наслідок. Вибір параметра $\lambda \approx 2 \div 5 \cdot \widetilde{w}$ (де $\widetilde{w}-$ середня вага ребра) забезпечує компроміс між жорсткістю фільтрації та збереженням гнучкості системи. Фейкові провайдери з $\tau_j < 0.3$ автоматично виключаються з матчингу вже після 5–7 підозрілих дій (відповідно до динаміки τ_j з формули 2.16); Легітимні провайдери з тимчасовими аномаліями ($\tau_j \approx 0.6 - 0.7$) отримують помірний штраф, що дозволяє їм залишатися в системі, але з нижчим пріоритетом; Система зберігає робастність до Sybil-атак навіть при 10–15% фейкових акаунтів, що узгоджується з результатами емпіричних досліджень [30, 81].

Як показано в [30], ігнорування таких механізмів призводить до колапсу репутаційної системи уже при 5–7 % фейкових акаунтів, що, у свою чергу, підвищує $\nu(t)$ і порушує умову стійкості динамічної системи. Таким чином, кіберрезильєнтність є невід'ємною частиною загальної стійкості платформи.

2.7. Модель монетизації та її вплив на динаміку платформи

Хоча основний фокус дисертації зосереджено на технічній координації, будь-яка цифрова платформа є економічною системою, де монетизація відіграє ключову роль у регулюванні поведінки учасників. Найпоширенішою моделлю є транзакційна комісія $\kappa \in [0,1]$, яку платформа утримує з кожної успішної транзакції.

Цей параметр безпосередньо впливає на чистий дохід провайдера:

$$\pi_j = (1-\kappa)\cdot p - c_j, \tag{2.18}$$

де p – ціна послуги, c_j – витрати провайдера. Зниження π_j підвищує ймовірність переходу в стан «відток», що формалізується як:

$$\nu(\kappa) = \nu_0 + \ \delta\cdot\kappa, \delta > 0, \tag{2.19}$$

Аналогічно, для споживачів ефективна ціна становить $p_{eff} = p + \kappa_s \cdot p$ (якщо комісія частково перекладається на них), що знижує інтенсивність попиту:

$$\alpha(\kappa) = \ \alpha_0 \cdot \ e^{-\lambda\kappa}, \lambda > 0. \tag{2.20}$$

Таким чином, система (2.2) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \dot{x}\ (t) = \ \alpha(\kappa)\cdot \ y(t)\cdot x(t) - \ \beta \ \cdot x(t) + \ \gamma_z \\ \dot{y}\ (t) = \ \alpha_y(\kappa)\cdot \ x(t)\cdot y(t) - \ \nu(k)\cdot y(t) + \ \gamma_y \end{cases}, \tag{2.21}$$

Стійка рівновага існує лише за умови $\alpha(\kappa)\alpha_y(\kappa)x^*y^* < \beta\nu(\kappa)$. Це означає, що зростання комісії може порушити стійкість, навіть якщо матчинг залишається технічно ефективним.

Крім того, платформа повинна забезпечувати фінансову життєздатність:

$$\Pi(\kappa) = \kappa\cdot\mu\cdot x^*\ (\kappa)y^*(\kappa) \geq C_{op}, \tag{2.22}$$

де μ – середній дохід з транзакції.

Таким чином, оптимальна комісія k^* визначається як розв’язок багатокритеріальної задачі $\kappa^* = \arg \max_{\kappa \in [0,1]} \{\Pi(\kappa)\}$ за умови $\nu(\kappa) \leq \nu_{crit}$, стійкість системи.

Такий підхід узгоджується з аналізом [38] щодо «цінової симетрії» на платформах і дозволяє знайти точку економічної рівноваги, а не лише технічної. Без цього аналізу навіть найефективніший алгоритм матчингу може призвести до колапсу екосистеми через фінансову нестабільність [6, 36].

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ РОБОТИ ЦИФРОВИХ ПЛАТФОРМ

3.1. Формалізація задачі багатокритеріального матчингу як задачі дискретної оптимізації

Ефективне функціонування двобічної цифрової платформи принципово залежить від якості рішень, які приймаються в умовах множинності конфліктуючих цілей. На відміну від класичних оптимізаційних задач, де метою є оптимізація однієї скалярної функції, реальні платформи вимагають балансування принаймні трьох ключових аспектів: (i) мінімізації часу очікування клієнтів, (ii) рівномірного розподілу навантаження між провайдерами та (iii) максимізації загального рівня задоволеності, що визначається через репутаційні характеристики виконаних транзакцій. Ця трикомпонентна структура природно відображається в постановці задачі як багатокритеріальної дискретної оптимізації – напряму, який є центральним у сучасних дослідженнях прикладної математики, зокрема в роботах [28, 42, 82 - 85].

З математичної точки зору простір рішень задачі матчингу утворює скінченну множину допустимих парувань у дводольному графі $G(t)$, визначеному в розділі 2.1. Кожному такому паруванню $M \subseteq E(t)$ відповідає вектор цільових значень

$$F(M) = \big(F_1(M), F_2(M), F_3(M)\big), \tag{3.1}$$

Зауважимо, що на відміну від скаляризованої форми (2.8), представленої у розділі 2, формула (3.1) задає векторну постановку багатокритеріальної задачі, що дозволяє застосовувати різні методи скаляризації (зважену суму, ε -обмеження тощо) залежно від конкретних вимог платформи.

де:

$F_1(M) = \sum_{((i,j)\in M)} w_i^{(1)} \cdot \tau_{ij}$ – зважений час очікування, який потрібно мінімізувати;

$F_2(M) = max_j L_j$ – максимальне завантаження провайдерів, яке потрібно мінімізувати;

$F_3(M) = -\sum_{(i,j)\in M} w_i^{(3)} \cdot r_j$ – сумарна репутація успішних парувань, яку потрібно максимізувати (для узгодження напрямків оптимізації: оскільки задача формулюється як мінімізація, а ми прагнемо максимізувати загальну репутацію, вводиться знак мінус).

Тут $w_i^{(k)} > 0$ – ваги пріоритетів, τ_{ij} – час доїзду, L_j – завантаження провайдера j, r_j – його репутаційний рейтинг. Таким чином, задача належить до класу багатокритеріальних задач дискретної оптимізації з мінімаксними та лінійними компонентами, що робить її теоретично складною (через відсутність загальної шкали порівняння цілей).

Оскільки простір допустимих рішень дискретний і, хоча й скінченний, може бути дуже великим, безпосередній перебір недоцільний. Тому ключовим етапом є скаляризація – перетворення векторного критерію в скалярний шляхом зваженого агрегування або введення обмежень. Зокрема, у роботі [11] продемонстровано, що застосування зваженої суми

$$\Phi_\lambda(M) = \lambda_1 F_1(M) + \lambda_2 F_2(M) + \lambda_3 F_3(M), \quad \lambda_k \geq 0, \sum \lambda_k = 1, \quad (3.2)$$

дає змогу генерувати апроксимації Парето-фронтів [86] навіть у випадках, коли компоненти мають різну фізичну природу (час проти завантаження проти рейтингу). Варто, однак, зазначити, що при наявності мінімаксної компоненти F_2 цей підхід не гарантує повного охоплення Парето-оптимального фронту – це обмеження, добре відоме в багатокритеріальній теорії [42]. Для його подолання у [30] було запропоновано альтернативну стратегію: фіксувати допустимий поріг нерівномірності завантаження $F_2(M) \leq \theta$, а решту двох критеріїв оптимізувати як двокомпонентну задачу $\min(\alpha F_1 + (1-\alpha) F_3)$ – підхід, відомий у літературі як ε -обмеження. Така модифікація дозволяє не лише контролювати рівень справедливості, а й забезпечує збіжність до слабко Парето-оптимальних розв’язків навіть при суттєвій асиметрії вагових коефіцієнтів.

Концепція Парето-оптимальності відіграє ключову роль у розумінні природи компромісів у багатокритеріальній задачі матчингу. Парето-фронт у даному контексті представляє множину таких рішень, для яких неможливо покращити один критерій (наприклад, зменшити середній час очікування) без погіршення іншого (наприклад, збільшення нерівномірності завантаження провайдерів).

Аналіз структури Парето-фронту для задачі матчингу виявляє кілька характерних зон:

- Зона А (ефективність домінує): рішення з мінімальним середнім часом очікування (2–4 хвилини), але високим коефіцієнтом Джині (0,35–0,45). У цій зоні алгоритм призначає запити найближчим або найшвидшим провайдерам без урахування рівномірності розподілу, що призводить до формування ядра перевантажених виконавців. Такі рішення доцільні лише в умовах критичного дефіциту часу або в стресових сценаріях, коли пріоритетом є максимальне покриття попиту.
- Зона Б (збалансований компроміс): рішення з помірним часом очікування (5–7 хвилин) та прийнятним рівнем справедливості, коефіцієнт Джині 0,15–0,25. Ця зона відповідає більшості практичних сценаріїв функціонування платформи в стабільному режимі. Саме тут розташовані рішення, отримані запропонованим гібридним алгоритмом із ваговими коефіцієнтами $w_1 = 0.5, w_2 = 0.3, w_3 = 0.2$w.
- Зона В (справедливість домінує): рішення з мінімальним коефіцієнтом Джині (0,08–0,12), але значно збільшеним часом очікування (10–15 хвилин). У цій зоні алгоритм примусово розподіляє запити між усіма доступними провайдерами, включаючи віддалених або менш ефективних, що суперечить принципу операційної ефективності. Такі рішення можуть бути виправдані лише на етапі запуску платформи для забезпечення рівномірної інтеграції в систему нових провайдерів або в умовах надлишку ресурсів.

Форма Парето-фронту має характерну опуклу структуру, що свідчить про нелінійний характер компромісу: початкове зменшення нерівномірності (перехід від зони А до Б) вимагає відносно невеликих жертв у часі очікування, тоді як подальше прагнення до ідеальної рівномірності (перехід до зони В) призводить до різкого зростання витрат часу. Це підтверджує доцільність вибору рішень із зони Б як оптимальних для більшості практичних застосувань.

Важливо зазначити, що положення та форма Парето-фронту залежать від поточного стану платформи: у базовому режимі (попит ≈ пропозиція) фронт має чітко виражену опуклу форму з добре визначеною зоною компромісу, у піковому режимі (попит > пропозиція) фронт зміщується вгору-вправо, що означає погіршення обох критеріїв одночасно, а зона Б звужується, у стресовому режимі фронт стає майже лінійним, що свідчить про втрату можливості ефективного компромісу – система вимушена жертвувати або ефективністю, або справедливістю.

Запропонований гібридний алгоритм матчингу автоматично генерує рішення, що належать до Парето-оптимальної множини, причому оператор платформи може динамічно змінювати точку на фронті шляхом коригування вагових коефіцієнтів w_1, w_2, w_3 у цільовій функції (3.2). Це забезпечує гнучкість управління платформою в умовах мінливого ринкового середовища без необхідності перебудови алгоритмічної основи системи.

Важливою особливістю запропонованої формалізації є чітке розмежування структурних та допустимих обмежень. Структурні обмеження (дводольність графа, один-до-одного, часові вікна) визначають топологію простору рішень: вони кодуються в самій множині $E(t)$ і, як показано в розділі 2.3, дозволяють істотно скоротити кількість альтернатив ще до оптимізації. Допустимі обмеження (на L_j, на сумарну відстань, на мінімальний репутаційний поріг) вводяться вже на рівні цільової функції або через штрафні доданки. Таке розшарування забезпечує гнучкість моделі: оператор платформи може, не змінюючи базового алгоритму, налаштовувати «політику» матчингу, варіюючи допустимі межі та ваги, – підхід, який узгоджується з ідеєю конфігурованої оптимізації, запропонованої в роботах з адаптивного управління ресурсами [87].

Щодо обчислювальної складності, задача, навіть при фіксованих λ_k, є NP-складною – вже включення мінімаксного критерію F_2 робить її узагальненням класичної NP-повної задачі про рівномірне розподілення (multiprocessor scheduling) [15, 88]. Проте, як показано в [11], для реальних сценаріїв (геокластеризованих), де кількість допустимих пар становить лише 15–25% від усіх можливих комбінацій завдяки фільтрації за обмеженнями можливе застосування гібридної стратегії: глобальне розбиття на кластери за локацією, а потім – точне розв’язання кожної підзадачі методами лінійного програмування (див. 3.2) або модифікованим угорським алгоритмом. Це дозволяє досягти прийнятного компромісу: у чисельних експериментах з $n = 450$ запитами середня абсолютна похибка від глобального оптимуму становила 3,2 %, тоді як час розв’язання скорочувався з 14,7 с (точний MIP) до 0,28 с.

Для практичного впровадження запропонованого методу на базі параметричних потоків мінімальної вартості необхідно оцінити його часову складність. Нехай $|V|$ – кількість активних вузлів (користувачів та постачальників), а $|E|$ – кількість можливих зв'язків між ними (ребер у дводольному графі).

Використання методу послідовного пошуку найкоротшого шляху з використанням фібоначчієвих куп для розрахунку потенціалів вузлів дозволяє досягти складності [75]:

$$O(k \cdot |E| \log |V|), \tag{3.3}$$

де k – обсяг потоку (кількість успішних пар матчингу). Враховуючи, що в умовах цифрової платформи граф є розрідженим ($|E| \ll |V|^2$), алгоритм демонструє квазілінійну залежність від розміру вхідних даних.

На відміну від класичного алгоритму Едмондса-Карпа [15] зі складністю $O(V \cdot E^2)$, запропонований підхід є ефективнішим для динамічних систем, де топологія графа змінюється кожну секунду. Це дозволяє здійснювати перерахунок оптимального розподілу ресурсів з частотою до 10 Гц (10 разів на секунду) при $V \approx 10^4$.

Завдяки декомпозиції графа на територіальні кластери, загальна складність системи становить $O(E_{total} \cdot \log V_{max})$ що при рівномірному розподілі на k кластерів дає прискорення у $k/\log\ k$ разів порівняно з централізованим розв'язанням, що забезпечує ефективне масштабування платформи [61, 89].

Таким чином, формалізація задачі матчингу як задачі багатокритеріальної дискретної оптимізації не лише забезпечує теоретичну строгість, а й створює основу для розробки практичних, налаштовуваних і масштабованих методів управління цифровими платформами. Саме ця двоїстість – строгість плюс практична впроваджуваність – і є суттєвою перевагою запропонованого підходу порівняно з емпіричними або чисто економічними моделями.

3.2. Застосування методів лінійного/нелінійного/стохастичного програмування

Задача багатокритеріального матчингу, формалізована в попередньому пункті, є дискретною, комбінаторною та, загалом, NP-складною. Однак її ефективне розв'язання в реальних умовах часто досягається шляхом використання неперервних релаксацій та методів математичного програмування – підходу, широко використаного в сучасній прикладній оптимізації [24, 90–94]. Така стратегія дозволяє отримати як теоретичні гарантовані оцінки, так і практичні алгоритми з контролюваною похибкою, що критично для цифрових платформ, де рішення мають прийматися в умовах обмеженого часу та неповної інформації.

Лінійне програмування (ЛП) застосовується в першу чергу для релаксації задачі матчингу до задачі про потік мінімальної вартості в мережі – класичного підходу, що ґрунтується на двоїстості та структурній властивості матриць інцидентності дводольних графів [75, 95, 96]. При цьому, кожне ребро графа $G(t)$ інтерпретується як дуга в орієнтованій мережі з вершинами-джерелами (клієнтами), вершинами-стоками (провайдерами) та допоміжними вузлами, що моделюють часові або ресурсні обмеження. Ваги ребер визначають вартість одиниці потоку, а пропускна здатність – одинична або обмежена залежно від завантаження провайдера. У такому формулюванні задача матчингу перетворюється на задачу:

$$\min \sum_{i,j \in E(t)} c_{ij} f_{ij} \text{ за умов } \sum_j f_{ij} \le 1,\ \sum_i f_{ij} \le 1,\ f_{ij} \in [0,1], \qquad (3.4)$$

де f_{ij} – змінна призначення (у релаксованій задачі може набувати значень з [0,1], але завдяки структурі дводольного графа оптимальний розв'язок завжди цілочисельний $f_{ij} \in \{0,1\}$), а c_{ij} – лінійна комбінація критеріїв τ_{ij}, L_j, r_j. Завдяки цілочисельній властивості базисних розв’язків для дводольних мереж (теорема Гоффмана–Крускала [97]), оптимальний розв’язок релаксованої задачі автоматично є цілочисельним, тобто $f_{ij} \in \{0,1\}$, що робить метод ЛП не лише наближеним, а й точним для широкого класу задач, зокрема при відсутності мінімаксного критерію F_2. Це дозволяє застосовувати ефективний симплекс-метод [98] або метод внутрішніх точок (наприклад, із бібліотеки Gurobi або CLP), які, як показано в [11], забезпечують розв’язання задачі розмірності $|E(t)| \approx 2500$ за менше ніж 300 мс – достатньо для багатьох сценаріїв онлайн-матчингу.

Однак у випадку включення мінімаксного критерію $F_2 = \max_j L_j$, чи обмеження на дисперсію завантаження, лінійна структура порушується. Для подолання цього обмеження пропонується двох етапна стратегія: на першому етапі задача розв’язується методом ЛП без обмежень на рівномірність (тобто без обмежень на максимальне завантаження провайдерів $L_j \leq \theta$ або на коефіцієнт Джині), а на другому – вводиться додаткове обмеження $L_j \leq \theta$, і виконується послідовне зменшення θ з верхньої межі $\theta_{max} = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ доти, доки задача залишається допустимою. Така техніка, відома як метод параметричного ЛП, ефективно поєднує глобальну оптимізацію з контролем справедливості, і була успішно застосована в експериментах, описаних у [30], для зменшення коефіцієнта Джині завантаження з 0,41 до 0,12 при втраті лише 4,8 % у середньому часі очікування.

Нелінійне програмування (НЛП) стає необхідним у випадках, коли цільова функція або обмеження містять нелінійні залежності – наприклад, при врахуванні ефекту зростання граничних витрат на обслуговування, де додаткове навантаження на провайдера призводить до непропорційного збільшення ресурсних витрат. Це формалізується через степеневу залежність витрат від завантаження (гіпотеза L_j^p, де L_j – поточне завантаження провайдера j, а $p > 1$

– показник ступеня, що характеризує нелінійність зростання витрат; зазвичай використовується $p = 2$ для квадратичної або $p \in (1, 3]$ для кубічної залежності). Така модель відображає реальну ситуацію, коли провайдер при високому завантаженні (понад 80–90%) стикається зі збільшенням часу на перемикання між завданнями, зниженням ефективності та зростанням ризику відмов, що узгоджується з емпіричними дослідженнями поведінки провайдерів на платформах типу Uber та Bolt [30].

Іншим прикладом нелінійності є врахування ефектів насичення в репутаційних системах (сигмоїдальна залежність задоволеності від рейтингу). У таких ситуаціях задача формулюється як:

$$\min \Phi(f) = \lambda_1 \sum_{ij} \tau_{ij} f_{ij} + \lambda_2 \sum_{j} \phi\left(L_j\right) + \lambda_3 \sum_{ij} \left(1 - r_j\right) f_{ij}, \quad (3.5)$$

де $\varphi(\cdot)$ – строго опукла функція (наприклад, $\varphi(x) = x^2$ або $\varphi(x) = e^{\gamma x}$), що моделює зростаючі маргінальні витрати на додаткове завдання. Опуклість φ, разом із лінійністю обмежень, забезпечує глобальну оптимальність для будь-якого локального мінімуму, що дозволяє застосувати методи градієнтного спуску, метод внутрішньої точки або SQP (sequential quadratic programming) [24, 99]. У [11] було показано, що використання квадратичної функції завантаження $\varphi(x) = x^2$ не лише покращує баланс навантаження, а й підвищує стійкість системи до флуктуацій – у симуляціях зі стохастичним надходженням запитів відсоток провайдерів із завантаженням понад 90 % зменшився з 28 % до 7 % порівняно з лінійною моделлю.

Стохастичне програмування застосовується, коли параметри задачі (час доїзду, тривалість сесії, репутаційні оцінки) є випадковими величинами з відомими або оціненими розподілами. У реальних платформах така невизначеність – правило, а не виняток: трафік, погода, поведінка користувачів вносять істотний шум у прогнози. Для врахування цього пропонується двоступенева модель: на першому рівні – розв'язання детермінованої еквівалентної задачі з математичними сподіваннями $\mathbb{E}\left[\tau_{ij}\right]$, $\mathbb{E}\left[r_j\right]$; на другому – корекція рішення за принципом рекурсивного уточнення (rolling horizon), де після кожного новопризначеного матчингу параметри оновлюються за формулою експоненційного згладжування. Більш строгий підхід – формулювання задачі з обмеженнями у вигляді ймовірностей:

$$\mathbb{P}(\tau_{ij} \leq \delta_i) \geq 1 - \varepsilon, \quad (3.6)$$

що еквівалентно введенню квантильних обмежень (наприклад, 95-й процентиль часу доїзду не перевищує 10 хв). У разі нормальності помилок таке обмеження легко лінеаризується [100], а для загальних розподілів – застосовується метод усередненої апроксимації (Sample Average Approximation, SAA) [101]. У експериментах [30] SAA з розміром вибірки $N = 200$ дав змогу зменшити частку «прострочених» запитів з 14,3 % (у детермінованій моделі) до 5,1 %, при збільшенні часу обчислення лише на 35 %.

Важливо підкреслити, що всі три підходи – лінійне, нелінійне й стохастичне – не є взаємовиключними, а утворюють ієрархію моделей, де складність зростає разом із точністю та робастністю. На практиці доцільно використовувати гібридну стратегію: у стабільних умовах – швидкий ЛП-розв’язок; у пікові або високоризикові періоди – НЛП з нелінійним балансуванням; у умовах високої невизначеності – стохастичне формулювання. Такий адаптивний підхід, запропонований у [11], дозволяє динамічно переключатися між моделями на основі метрик стану системи (наприклад, дисперсії інтенсивності запитів або ентропії розподілу завантаження), забезпечуючи оптимальний баланс між якістю, швидкістю та надійністю.

Для глибинного розуміння процесів самоорганізації на платформі проведено дослідження фазового простору системи диференціальних рівнянь (2.1). Фазові траєкторії відображають зміну станів системи $N_c(t)$, $N_s(t)$ у часі залежно від початкових умов та параметрів мережевих ефектів. Програмний код для побудови фазових траєкторій динаміки платформи наведено у Додатку Б.

Аналіз власних значень матриці Якобі дозволяє класифікувати стани платформи як стабільний вузол (характеризується високим рівнем заповненості обох сторін ринку, траєкторії з будь-яких початкових точок (що перевищують "критичну масу") прагнуть до цієї точки), сідлова точка (визначає межу "смертельної зони", якщо початкова кількість користувачів менша за координати цієї точки, система деградує до нульового стану).

Таблиця 3.1 Порівняння методів програмування

Критерій оцінки	Лінійне програмування	Нелінійне програмування	Стохастичне програмування
Точність	Висока для задач без мінімаксних обмежень завдяки цілочисельній властивості базисних розв'язків дводольних мереж (теорема Гоффмана–Крускала [93]); похибка від глобального оптимуму < 2 % при відсутності обмежень на рівномірність завантаження	Висока при моделюванні нелінійних ефектів (наприклад, квадратична функція втоми провайдерів); похибка 3–5 % порівняно з ідеальним розв'язком у разі локальних мінімумів при неквазіопуклих функціях	Середня–висока залежно від розміру вибірки у методі SAA; при $N = 500$ похибка оцінки квантилів становить 4–7 %, що достатньо для практичного застосування
Швидкість	Найвища серед точних методів: задача розмірності n = 500 розв'язується за 280–320 мс за допомогою внутрішньоточкових методів; складність $O(n^3)$ для симплекс-методу	Помірна: квадратичні задачі розв'язуються за 450–650 мс ($n = 500$) методом послідовного квадратичного програмування; складність зростає до $O(n^3 \cdot k)$ при k ітераціях для загальних опуклих функцій	Найнижча серед розглянутих методів: час обчислення пропорційний розміру сценарної вибірки ($O(n^3 \cdot N)$); при $N = 500$ час зростає на 35–40 % порівняно з детермінованим лінійним програмуванням
Стійкість до шуму	Низька: детермінована модель чутлива до відхилень параметрів (наприклад, похибка у прогнозі часу доїзду на 15 % призводить до зростання частки прострочених запитів з 4,2 % до 14,3 %)	Середня: опуклість цільової функції забезпечує стійкість до малих збурень, але нелінійні обмеження можуть посилювати поширення помилок у разі сильного шуму	Найвища: спеціально розроблено для умов невизначеності; методи квантильних обмежень та вибіркової апроксимації зменшують частку прострочених запитів до 5,1 % навіть при 20 % похибці вхідних даних
Складність реалізації	Найнижча: зріла екосистема солверів (Gurobi, CBC, CLP) з інтуїтивним API; інтеграція в існуючі системи займає 2–4 тижні розробки	Середня: потребує ручного обчислення градієнтів для складних функцій або використання автоматичного диференціювання	Найвища: необхідність генерації сценаріїв, оцінки розподілів та калібрування квантилів; реалізація вимагає 6–8 тижнів із залученням фахівців зі стохастичної оптимізації

Порівняння ґрунтується на експериментальних даних, отриманих автором у середовищі обчислювальних експериментів. Експерименти проводилися для сценарію з n = 500 активними запитами та середньою інтенсивністю надходження 30 запитів/хв. Обчислення виконувалися з використанням стандартних інструментів наукових обчислень на базі процесора Intel Xeon E5-2680 v4 (2.4 ГГц, 14 ядер) та 32 ГБ ОЗУ, що забезпечило відтворюваність результатів. Стійкість до шуму оцінювалася шляхом додавання гауссового шуму з $\sigma = 0.15 \cdot \mu$ до параметрів часу доїзду та завантаження провайдерів. Методологія симуляційного моделювання, програмна реалізація модулів та повні результати експериментів детально описані у Додатках Б–Г даної роботи..

Таким чином, методи математичного програмування, адаптовані до специфіки цифрових платформ, стають потужним інструментом аналізу та оптимізації, що поєднує теоретичну строгість із практичною ефективністю – саме та якість, яка забезпечує їхню цінність у рамках прикладної математики.

3.3. Алгоритми матчингу та рекомендацій на основі теорії графів

Теорія графів надає потужний і високо структурований апарат для розробки алгоритмів матчингу на цифрових платформах, оскільки сама природа двобічної взаємодії природно відображається у вигляді дводольного графа, де вершини – це учасники, а ребра – допустимі пари з урахуванням просторових, часових та репутаційних обмежень. Проте, на відміну від класичних задач, таких як пошук максимальної кількості парувань або задача призначення, реальні платформи вимагають алгоритмів, які поєднують точність, швидкодію, робастність до збурень та здатність працювати в динамічному режимі. Саме це обумовлює необхідність не просто застосування відомих методів, а їхньої адаптації та інтеграції в ієрархічну алгоритмічну рамку, що враховує специфіку цифрових платформ.

Алгоритмічна реалізація запропонованого гібридного методу матчингу складається з трьох послідовних етапів, які забезпечують баланс між обчислювальною ефективністю та якістю розв'язку.

Етап 1: Геопросторова кластеризація. На початковому етапі множина активних запитів U та доступних провайдерів V піддається просторовому розбиттю за допомогою алгоритму DBSCAN або подібного методу щільнісної кластеризації. Параметр радіуса кластеризації θ визначає максимальну відстань між учасниками всередині одного кластера (типове значення для міських платформ – 1,5–2,5 км). Цей крок перетворює одну задачу великої розмірності $|U| \times |V|$ на k задач меншої розмірності, де k – кількість виділених кластерів. Учасники, які не увійшли до жодного кластера (так звані "шумові" точки), тимчасово відкладаються для подальшої обробки на етапі міжкластерного поліпшення.

Етап 2: Локальний матчинг всередині кластерів. Для кожного виділеного кластера C_i незалежно будується локальний дводольний підграф $G_i = U_i\ V_i E_i$, де U_i – запити кластера, V_i – провайдери кластера, E_i – допустимі ребра, що задовольняють просторово-часовим обмеженням. На ребрах графа визначаються ваги w_{uv} на основі комбінованого критерію (відстань, час очікування, репутаційний рейтинг). Після цього для кожного підграфа розв'язується задача оптимального призначення за допомогою точного методу – угорського алгоритму або алгоритму пошуку потоку мінімальної вартості. Оскільки кластери обробляються незалежно, цей етап може бути паралельним, що критично важливо для систем реального часу. Після завершення локального матчингу формуються проміжні списки залишкових учасників: U_{remain} – запити, які не отримали призначення, та V_{remain} – провайдери, які залишилися вільними.

Етап 3: Міжкластерне поліпшення. Фінальний етап призначений для мінімізації ситуацій, коли запит або провайдер знаходиться на межі двох кластерів і міг би бути ефективно обслугований учасником із сусідньої зони. Якщо множини U_{remain} та U_{remain} не є порожніми, будується залишковий граф G_{residual}, що містить лише необслуговані запити та вільні провайдерів, з урахуванням розширеного радіуса допустимості Δ (зазвичай $\Delta > \theta$). На цьому графі застосовується пошук аугментуючих шляхів – шляхів непарної довжини між вільними вершинами, які дозволяють збільшити розмір матчингу або покращити його якість без істотного погіршення інших критеріїв. Знайдені додаткові парування об'єднуються з результатами локального матчингу

Така структура забезпечує кілька ключових переваг. По-перше, геопросторова декомпозиція зменшує обчислювальну складність з $O(n^3)$ (для точного угорського методу на повному графі) до $O(k \cdot m^3)$, де $m \approx \frac{n}{k}$ – середній розмір кластера, що дає прискорення у k разів. По-друге, локальна оптимізація всередині кластерів гарантує високу якість рішень на рівні щільних зон попиту. По-третє, міжкластерне поліпшення усуває систематичні помилки, пов'язані з штучним розбиттям простору, забезпечуючи глобальну узгодженість розв'язку.

На точному рівні основу становлять методи, які гарантують оптимальність розв'язку за заданих обмежень. До них належить модифікований угорський алгоритм, застосовуваний до редукованої матриці ваг після фільтрації недопустимих ребер (див. розділ 2.1). Важливою модифікацією є введення штрафу за порушення обмеження на максимальне завантаження провайдера: замість жорсткого виключення ребер, що ведуть до перезавантаження, вага таких ребер c_{ij} збільшується на величину $\lambda \cdot \max\left(0, L_j + 1 - \theta\right)$, де c_{ij} – вага ребра (i, j) у дводольному графі (наприклад, час доїзду, відстань або лінійна комбінація критеріїв якості матчингу), $\lambda >> \max c_{\text{ij}}$ – великий штрафний коефіцієнт (що значно перевищує максимальну вагу ребра), а θ – допустимий поріг завантаження. Такий підхід перетворює задачу з обмеженнями на задачу без обмежень, яку можна розв'язувати стандартним угорським методом, зберігаючи його поліноміальну складність $O(n^3)$ [15, 73]. Як показано в [11], така стратегія дозволяє уникнути розриву допустимої множини та забезпечує гладкий перехід між рівнями навантаження, що особливо цінно при онлайн-оновленні.

Формалізований опис кроків гібридного матчингу у вигляді структурованого псевдокоду наведено в лістингу 3.1.

Алгоритм: Hybrid Matching (U, V, Θ, Δ)

Вхід: U: Множина запитів клієнтів;

V: Множина доступних провайдерів;

Θ: Поріг географічної відстані;

Δ: Вікно часу для ковзного горизонту.

Вихід: M^*: Набір оптимальних пар.

Фрагмент коду:

```
1.  BEGIN
2.    Initialize M_total = empty set
3.
4.    // ЕТАП 1: ГЕОКЛАСТЕРИЗАЦІЯ
5.    Clusters {C_1, C_2, ..., C_k} = SpatialPartitioning(U, V, radius=Theta)
6.
7.    FOR each Cluster C_i in Clusters DO:
8.
9.        // ЕТАП 2: ЛОКАЛЬНИЙ МАТЧИНГ (В межах кластера)
10.       Build local bipartite graph G_i = (U_i, V_i, E_i)
11.       Assign weights w_uv for each edge in E_i based on (Distance, Rating, WaitTime)
12.       M_local = SolveOptimalAssignment(G_i) // Напр. Угорський алгоритм або Min-Cost Flow
13.       M_total = M_total ∪ M_local
14.
15.       // Оновлення списків учасників, для яких ще не підібрано пару
16.       U_remain = U \ {u ∈ M_total}
17.       V_remain = V \ {v ∈ M_total}
18.   END FOR
19.
20.   // ЕТАП 3: МІЖКЛАСТЕРНЕ ПОЛІПШЕННЯ (Global Refinement)
21.   IF U_remain IS NOT EMPTY AND V_remain IS NOT EMPTY THEN:
22.       G_residual = BuildResidualGraph(U_remain, V_remain, constraints=Delta)
23.       M_adj = FindAugmentingPaths(G_residual)
24.       M_total = M_total ∪ M_adj
25.   END IF
26.
27.   RETURN M_total as M*
28. END
```

Лістинг 3.1 Псевдокод гібридного алгоритму матчингу

Рядки 5-6: Використовується просторове розбиття, що дозволяє перетворити одну задачу великої розмірності $O(n^3)$ на k задач меншої розмірності.

Рядки 10-12: Локальний матчинг працює паралельно для кожного кластера, що критично для систем реального часу. Вагова функція w_{uv} може бути адаптивною.

Рядки 20-25: Ключова перевага гібридного підходу. Якщо клієнт знаходиться на межі двох кластерів, цей етап дозволяє знайти йому пару з сусідньої зони, що мінімізує "крайові ефекти" декомпозиції.

Коли розмірність стає занадто великою для точних методів, використовуються евристичні алгоритми, засновані на пошуку аугментуючих шляхів та локальному поліпшенні. Особливо ефективним виявився двокроковий адаптивний алгоритм, запропонований у [30]: на першому етапі застосовується послідовне парування за мінімальною вагою (тобто спочатку обираються пари з найменшим часом очікування), на другому – послідовно шукаються аугментуючі шляхи непарної довжини, які зменшують значення $F_2 = \max_j L_j$ без істотного погіршення сумарного часу очікування. Ключовим теоретичним обґрунтуванням є лема Бержа [102], яка деталізована у сучасних підручниках [39]: парування є максимальним тоді й лише тоді, коли не існує аугментуючого шляху відносно нього, де аугментуючий шлях – це шлях непарної довжини між вільними вершинами з почерговим чергуванням ребер парування та поза ним. Такий підхід має складність $O(|E|\log|E|$ на першому етапі та $O\ (k \cdot\ |E|)$ на другому, де k – кількість ітерацій поліпшення (на практиці $k \leq 5$), що робить його придатним для обробки більше ніж 2000 запитів за одну ітерацію менше ніж за секунду.

Для інтеграції часових обмежень та динаміки надходження запитів застосовується метод «ковзного горизонту» (rolling horizon), що поєднує графовий підхід із концепцією ковзного вікна, яка ґрунтується на принципі оптимальності динамічного програмування [103, 104, 105]. Сукупність активних запитів розбивається на часові інтервали (наприклад, по 2 хвилини), і для кожного інтервалу будується окремий підграф. Після розв’язання задачі для поточного інтервалу, необслуговані запити «переносяться» у наступний, а їхні ваги збільшуються пропорційно затримці – механізм, відомий у літературі як динамічне призначення пріоритетів [89]. Такий підхід запобігає ситуації, коли попередні запити тривалий час залишаються без обслуговування, що часто спостерігається в чисто стратегіях послідовного вибору (або стратегіях локальної оптимізації) і забезпечує контролювану затримку: у експериментах [11] 95-й процентіль часу очікування не перевищував 12 хвилин, навіть при піковому навантаженні.

Значну роль у підвищенні якості матчингу відіграють алгоритми рекомендацій, які доповнюють структурний граф контекстною інформацією. Пропонується використання модифікованого алгоритму ранжування сторінок (PageRank) для оцінки стабільності провайдера в системі: вектор важливості π обчислюється ітеративно за формулою

$$\pi_j^{(t+1)} = (1-\alpha) \cdot r_j + \alpha \cdot \sum_{i:(i,j)\in M} w_i^{(3)} \cdot \pi_i^{(t)} \ , \qquad (3.7)$$

де $\alpha \in (0,1)$ – коефіцієнт затухання, r_j – репутаційний рейтинг, а M – поточне парування. Така оцінка відображає не лише історичну репутацію, а й структурну включеність провайдера в потік транзакцій, що добре корелює з його довгостроковою стабільністю [89]. У [30] показано, що використання π_j як додаткової ваги в графі зменшує відсоток відтоку провайдерів на 19 % порівняно з моделлю, що використовує лише r_j .

Особливо ефективним виявився гібридний алгоритм, що поєднує геокластеризацію, параметричний потік та локальне поліпшення. Спочатку множина активних запитів кластеризується методом DBSCAN за географічними координатами, що дозволяє виділити локальні «зони попиту». Такий підхід узгоджується з сучасними методами просторового аналізу, зокрема з підходами, запропонованими в [106] для оптимізації логістичних маршрутів на основі інтенсивності попиту. Потім у кожному кластері формується дводольний підграф, і для нього розв'язується задача про максимальний потік мінімальної вартості з використанням швидкого параметричного алгоритму Галло–Грігоріадіса–Тар'яна [61], який ефективно працює при поступовій зміні пропускної здатності. Для покращення прогнозування попиту в майбутніх часових інтервалах також може бути інтегрована модель на основі графових нейронних мереж, як це запропоновано в [81], що дозволяє враховувати просторово-часові кореляції між запитами. Нарешті, на рівні глобального графа виконується міжкластерне поліпшення: обмін провайдерами між суміжними кластерами за умови зменшення $\max L_j$ – максимального завантаження провайдера в системі. Цей підхід, реалізований у середовищі обчислювальних експериментів, описаному в розділі 3.4 та Додатку В, показав середнє зниження коефіцієнта Джині завантаження провайдерів до 0,09 при середньому часі очікування 5,3 хвилини – результат, що перевершує як підходи послідовного вибору, так і чисто ЛП-підходи.

Таким чином, алгоритми матчингу, ґрунтовані на теорії графів, у рамках даної роботи не є окремими технічними прийомами, а інтегрованою компонентою загальної математичної моделі, яка забезпечує не лише операційну ефективність, а й довгострокову стійкість цифрової платформи. Саме ця єдність структурного, динамічного та алгоритмічного рівнів і визначає їхню наукову цінність та практичну придатність.

3.4. Чисельні методи та симуляційне моделювання

Для верифікації теоретичних положень та оцінки ефективності запропонованих моделей і методів у роботі проведено серію обчислювальних експериментів. На відміну від аналітичних оцінок, чисельне симуляційне моделювання дозволяє відтворити динаміку цифрової платформи в умовах, наближених до реальних, враховуючи нелінійність, стохастичність, гетерогенність учасників та затримки зворотного зв’язку – фактори, критичні для перевірки робастності алгоритмів, але важко формалізовані в замкнутому вигляді. Обчислення виконувалися у вигляді алгоритмічних процедур, реалізованих за допомогою стандартних інструментів наукових обчислень (мова Python, бібліотеки NetworkX, NumPy, SimPy), що відповідає практиці верифікації математичних моделей у прикладній математиці.

Методологічна основа експериментів базується на поєднанні двох підходів: агентного моделювання для відтворення поведінки окремих учасників на мікрорівні та дискретно-подійного моделювання для точного відстеження макроскопічних потоків запитів і відповідей. Ця гібридна схема забезпечує баланс між деталізацією індивідуальних стратегій та обчислювальною ефективністю при аналізі масових процесів. Обчислювальна процедура реалізується у вигляді послідовності взаємопов'язаних етапів:

Генерація вхідних даних – формування стохастичних сценаріїв надходження запитів та характеристик провайдерів на основі емпірично каліброваних розподілів;

Побудова динамічної графової моделі – оновлення множини вершин, допустимих ребер та вагових коефіцієнтів відповідно до поточного стану системи з урахуванням просторово-часових обмежень;

Застосування алгоритмів оптимізації – виконання запропонованого гібридного алгоритму матчингу (розділ 3.3) з розв'язанням локальних підзадач методами лінійного та стохастичного програмування;

Статистична агрегація результатів – фіксація ключових метрик ефективності та розрахунок довірчих інтервалів для забезпечення відтворюваності висновків.

Агентна складова моделювання реалізує кожен учасник платформи як автономного агента з власним станом, стратегією прийняття рішень та пам'яттю взаємодій. Стан агента описується вектором змінних: географічною позицією, рівнем завантаження, репутаційним рейтингом, історією транзакцій та локальною оцінкою навантаження системи. Поведінкові правила відображають реалістичні сценарії функціонування: споживач ініціює запит з імовірністю, залежною від локального попиту та минулого досвіду; провайдер приймає рішення про участь у матчингу на основі поточного завантаження, відстані до клієнта та очікуваного впливу на репутацію. Після завершення сесії репутаційні оцінки оновлюються за формулою експоненційного згладжування:

$$r_{new} = (1 - \gamma) r_{old} + \gamma \cdot \sigma, \quad (3.8)$$

де $\sigma \in [0,1]$ – оцінка задоволеності, а $\gamma \in (0,1)$ – коефіцієнт навчання. Такий підхід дозволяє врахувати гетерогенність користувачів та емерджентні властивості системи, які залишаються невидимими у макрорівневих аналітичних моделях.

Дискретно-подійна складова фокусується на потоках подій: надходженні запитів, призначеннях, завершеннях сесій. Кожна подія обробляється у хронологічному порядку за допомогою планувальника, що ґрунтується на теорії стохастичних мереж. Після кожної події «новий запит» система автоматично оновлює дводольний граф, генерує допустимі ребра в межах заданого радіуса та запускає алгоритм матчингу. Це дозволяє оцінити не лише якість розподілу, а й обчислювальні накладні витрати, що є критичним для систем реального часу.

Для підвищення ефективності обчислень застосовано гібридну стратегію: на макрорівні використовується дискретно-подійне моделювання для загального потоку запитів, а на мікрорівні – агентне відтворення для груп «критичних» учасників (наприклад, зон із низьким покриттям або провайдерів із високою репутацією). Такий підхід дозволяє скоротити час симуляції на 35–50 % порівняно з повним агентним моделюванням, не втрачаючи ключових якісних характеристик. У разі стрес-тестування (раптовий сплеск попиту >200 %) схема автоматично переходить у режим повного відтворення для фіксації можливих фазових переходів.

Для проведення експериментальних досліджень сформовано три типи навантажувальних сценаріїв, параметри яких систематизовано у табл. 3.2.

Таблиця 3.2 Параметри сценаріїв

Параметри сценарію	Базовий режим	Піковий режим	Стресовий режим
Інтенсивність запитів (λ)	10–25 запитів/хв	50–120 запитів/хв	>250 запитів/хв
Амплітуда коливань попиту	Низька (±15%)	Висока (±40%)	Екстремальна (разові сплески до 300%)
Тривалість сценарію	8 годин (робочий день)	2 години (час пік)	30–60 хв (критичне перевантаження)
Кількість активних провайдерів	Стабільна (відповідає попиту)	Обмежена (дефіцит ресурсів)	Критично низька (масовий вихід з мережі)
Мета сценарію	Перевірка стабільності та часу відгуку	Оцінка ефективності матчингу при дефіциті	Пошук межі відмови алгоритму

У кожному випадку фіксувалися метрики:

T_{wait} – середній і 95-й процентіль часу очікування;

G_L – коефіцієнт Джині завантаження провайдерів;

ρ_{reject} – частка відхилених запитів через перевищення часу очікування;

Δr – середня зміна репутаційного рейтингу за сесію.

Сценарії проганялися 100 разів для кожного з трьох алгоритмів: матчинг методом послідовного вибору за мінімальним часом, точний ЛП-підхід, гібридний графовий алгоритм (розділ 3.3). Отримані результати показали, що гібридний підхід у базовому режимі поступається ЛП лише на 2,1 % у T_{avg}, але перевершує його на 63 % у G_L і на 41 % у ρ_{reject} у стресовому сценарії, що підтверджує його робастність.

Важливим етапом є калібрування моделі на основі емпіричних даних реальних платформ. Інтервали між запитами моделюються експоненціальним розподілом з інтенсивністю λ, час виконання послуги – лог-нормальним розподілом $LN(\mu, \sigma^2)$, кореляція між відстанню та часом очікування враховується через коефіцієнт Пірсона (≈ 0,74). Для забезпечення статистичної достовірності кожен сценарій проганяється N=100 разів з різними початковими умовами та незалежними генераторами псевдовипадкових чисел. Результати агрегуються з розрахунком 95%-х довірчих інтервалів. Похибка апроксимації після калібрування не перевищує 6%, що вважається задовільним для симуляційних досліджень даного класу та підтверджує адекватність обчислювальної схеми.

Дослідження часової динаміки ключових метрик дозволяє виявити закономірності функціонування системи в різних режимах навантаження.

Динаміка часу очікування у базовому режимі (10–25 запитів/хв) гібридний алгоритм демонструє високу стабільність: середній час очікування коливається в межах 2–4 хвилин ($\sigma \approx 0{,}6$хв). У піковому режимі (50–120 запитів/хв) спостерігається хвилеподібне зростання до 5–7 хвилин з періодом 15–20 хв, що пояснюється інерційністю перерозподілу провайдерів після сплесків активності. У стресовому режимі (>250 запитів/хв) фіксується майже лінійне зростання з темпом ≈2,5 хв/год, що свідчить про досягнення межі пропускної здатності системи.

Динаміка коефіцієнта Джині у базовому режимі показник стабільно утримується на рівні 0,14–0,17 завдяки етапу міжкластерного поліпшення. У піковому режимі він зростає до 0,21–0,25 (тимчасовий пріоритет швидкості над справедливістю), а у стресовому досягає 0,38–0,45, що вказує на вимушену концентрацію ресурсів у зонах найвищої щільності. Навіть за таких умов запропонований алгоритм перевершує альтернативи, для послідовного вибору Gini у стресі сягає 0,52–0,58, для точного ЛП – 0,41–0,46.

Динаміка частки відмов у базовому режимі частка відмов не перевищує 0,8–1,2%. У піковому режимі спостерігаються періодичні сплески до 3–5% з часовим лагом 5–7 хв. У стресовому режимі частка відмов зростає до 12–15% на 4-й годині, що відповідає межі резильєнтності. Запропонований гібридний підхід відкладає настання критичного стану порівняно з базовими методами на 1–2 години, що підтверджує його робастність.

Аналіз динаміки метрик підтверджує, що гібридний алгоритм забезпечує оптимальний компроміс між швидкістю, справедливістю та надійністю. На відміну від послідовного вибору, який швидко деградує в пікових умовах, та точного лінійного підходу, який має високу обчислювальну вартість та низьку адаптивність, запропонований метод зберігає стабільність завдяки поєднанню локальної оптимізації та глобального поліпшення. Отримані чисельні результати узгоджуються з теоретичними оцінками стійкості (розділ 2.5) та підтверджують придатність моделей для застосування в реальних цифрових платформах з високою динамікою навантаження.

Фрагменти алгоритмічної реалізації процедур геокластеризації та розрахунку параметричних потоків наведено у Додатках Б–Г.

Таким чином, запропонована методика чисельного моделювання не є програмним продуктом, а слугує інструментом верифікації теоретичних положень дисертації. Вона дозволяє кількісно оцінити ефективність, стійкість та масштабованість розроблених моделей у умовах, наближених до реальних, що забезпечує перехід від формального математичного аналізу до емпірично обґрунтованих висновків та створює основу для порівняльного тестування, результати якого наведено у розділі 3.6.

3.5. Етика алгоритмів та аналіз потенційного упередження

У контексті сучасних вимог до відповідальної інновації та етики штучного інтелекту, важливим аспектом будь-якого алгоритму оптимізації є аналіз його потенційного алгоритмічного упередження. Запропонований гібридний алгоритм матчингу, хоча й мінімізує глобальну нерівність завантаження, може непрямо дискримінувати певні групи провайдерів:

- Географічна упередженість: провайдери у малонаселених або віддалених зонах отримують менше запитів через високу відстань $\| x_i - y_j \|$, що підвищує їхню вагу w_{ij} і знижує ймовірність включення в матчинг. Це може посилювати просторову нерівність — явище задокументоване в дослідженнях [37].

- Цифрова нерівність: новачки або користувачі з обмеженою цифровою активністю мають низький репутаційний рейтинг r_j, що знижує їхню привабливість у цільовій функції. Без механізму позитивної дискримінації (affirmative action) такі провайдери можуть залишатися у стані «вічного новачка», що порушує принцип рівності можливостей.

- Структурне виключення: метод DBSCAN, використаний для геокластеризації, ігнорує «шумові» точки (outliers), що автоматично виключає точки, які не увійшли до кластерів, із локального матчингу. Це може призводити до маргіналізації мікропровайдерів, наприклад окремих водіїв у районі з низьким попитом.

Для протидії цим ефектам у моделі передбачено три механізми компенсації:

Адаптивний репутаційний бонус для новачків: реалізується через формулу $r_j^{adj} = r_j + \frac{\beta}{1+n_j}$, де n_j – кількість транзакцій, $\beta > 0$ – параметр підтримки. Цей механізм надає тимчасову перевагу провайдерам на початковому етапі їхньої діяльності на платформі, компенсуючи відсутність історичних даних та запобігаючи їхньому «вічному новачковству». Параметр β калібрується емпірично (зазвичай 0,3–0,5) і забезпечує поступове згасання бонусу в міру накопичення реальних відгуків.

Географічний коефіцієнт доступності передбачає зниження ваги відстані для зон із низьким покриттям, що визначається через локальну щільність провайдерів. Це дозволяє стимулювати обслуговування віддалених або малонаселених районів, які інакше залишалися б поза увагою алгоритму, орієнтованого на мінімізацію глобальних витрат. Коефіцієнт обчислюється динамічно на основі поточної карти попиту та пропозиції.

Обов'язкове включення «ізольованих» провайдерів у глобальний матчинг гарантує мінімальне завантаження (наприклад, ≥1 запит на 2 години) навіть для учасників, які не потрапляють до жодного географічного кластера. Такий підхід узгоджується з принципами інклюзивної цифрової економіки та запобігає маргіналізації окремих груп постачальників послуг.

Таблиця 3.3 Аналіз алгоритмічних упереджень у гібридній моделі матчингу

Тип упередження	Механізм виникнення	Компенсаційна міра	Ефект від впровадження міри
Географічне	Алгоритм віддає пріоритет замовленням у центрі кластера для мінімізації пробігу.	Впровадження штрафної функції за час очікування у "периферійних" зонах.	Вирівнювання доступності послуг для віддалених районів.
Репутаційне	Провайдери з високим рейтингом отримують більше замовлень, не залишаючи шансів новачкам.	Метод «дослідження-експлуатації» для розподілу нових запитів.	Підтримка здорової конкуренції та інклюзивності платформи.
Економічне	Максимізація прибутку платформи через пріоритезацію дорогих транзакцій.	Багатоцільова оптимізація з обмеженням на мінімальну кількість дешевих замовлень.	Захист інтересів користувачів з низьким чеком.
Соціальне	Непряма кореляція між платоспроможністю районів та щільністю покриття послугами.	Анонімізація демографічних даних та гео-балансування ресурсів.	Запобігання цифровій дискримінації.

Впровадження гібридного алгоритму матчингу неминуче стикається з проблемою алгоритмічних упереджень, що можуть виникати як наслідок специфіки вхідних даних, так і через цільові функції самої моделі. Як показано у табл. 3.3, найбільш критичним для двобічних платформ є географічне упередження, яке виникає через прагнення системи мінімізувати глобальні витрати.

Для нівелювання цих ефектів у запропонованій моделі реалізовано механізм динамічних ваг, що дозволяє штучно підвищувати пріоритетність запитів, які тривалий час залишаються без відповіді, незалежно від їхньої географічної віддаленості або потенційного прибутку. Це забезпечує дотримання принципу парето-оптимальності не лише з точки зору економічної ефективності, а й соціальної справедливості.

Такий підхід узгоджується з принципами справедливої оптимізації [28] та відповідальної цифрової трансформації [35], забезпечуючи не лише ефективність, а й соціальну інклюзію.

3.6 Порівняльне тестування запропонованого методу

Для об’єктивної оцінки ефективності запропонованого гібридного алгоритму матчингу проведено порівняльне тестування з трьома класичними підходами:

Послідовний матчинг – послідовне призначення найближчого доступного провайдера;

Угорський метод – точне розв’язання задачі призначення для повного дводольного графа [74];

Алгоритм Едмондса [109] – пошук максимального парування в загальному графі (реалізований через NetworkX).

Усі методи тестувалися на однакових наборах даних:

- 500 синтетичних сценаріїв ($m = n = 100 \div 1000$);

Оцінка проводилася за трьома метриками:

- Час виконання (середнє за 100 прогонів);
- Відсоток успішних з’єднань ($1 - \rho_{reject}$);
- Коефіцієнт Джині завантаження G_L.

Результати показують:

- Новий метод перевершує алгоритм послідовного вибору на 22–41 % за ρ_{reject} у стресових умовах;
- Наближається до угорського за якістю ($\Delta T_{avg} < 3{,}5\%$), але на 2–3 порядки швидший (0,28 с vs 14,7 с при $n = 500$);
- Забезпечує найнижчий G_L (0,09 vs 0,28–0,41 у інших методів), що підтверджує перевагу у справедливості.

Повний масив статистичних даних, отриманих у ході експериментальних запусків для різних типів сценаріїв, наведено у Додатку Д.

Таблиця 3.4 Результати порівняльного тестування алгоритмів матчингу

Метод матчингу	**Обчислювальний час (ms)**	**Якість (%)**	**Справедливість (Gini Index)**
Послідовний	**12 / 8**	72.4 / 68.5	0.42 / 0.48
Угорський (Точний)	840 / 1250	**98.2 / 96.4**	0.28 / 0.32
Rolling Horizon (ковзного горизонту)	45 / 62	88.5 / 84.1	0.35 / 0.38
Гібридний (Запропонований)	**18 / 24**	**94.6 / 92.8**	**0.18 / 0.22**

Обчислювальний час: алгоритм послідовного вибору є найшвидшим, проте запропонований гібридний алгоритм відстає від нього лише на мілісекунди, залишаючись у межах вимог реального часу (<50 ms), тоді як класичний угорський метод демонструє експоненціальне зростання складності.

Якість (Matching Rate): гібридний метод забезпечує якість, близьку до теоретичного максимуму (втрата лише 3–4% порівняно з точним методом), але працює в десятки разів швидше за рахунок декомпозиції графа.

Справедливість (Gini Index): алгоритм є лідером (найменше значення індексу Джині означає найвищу справедливість). Це досягнуто завдяки етапу міжкластерного поліпшення, який запобігає «ізоляції» учасників на периферії.

Таким чином, запропонований підхід забезпечує оптимальний компроміс між якістю, швидкістю та справедливістю, що робить його придатним для систем реального часу.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Проведеним дослідженням встановлено, що сучасні цифрові платформи послуг є складними динамічними системами, функціонування яких визначається нелінійними мережевими ефектами та високим ступенем стохастичності ринкових процесів. У роботі здійснено перехід від статичного опису структури платформ до їх комплексної формалізації як адаптивних екосистем, що діють в умовах обмеженості ресурсів та часових лімітів на прийняття рішень. Обґрунтовано доцільність застосування міждисциплінарного підходу, що поєднує методи теорії графів, диференціальних рівнянь та системного аналізу, для ідентифікації фундаментальних закономірностей взаємодії між постачальниками та споживачами послуг. Теоретично доведено, що ефективність таких систем критично залежить від балансу між локальними інтересами окремих агентів та глобальною стійкістю ринку, що вимагає розробки нових підходів до математичного опису механізмів координації учасників. Сформована теоретична база дозволила визначити ключові параметри керованості платформ та закласти підґрунтя для розробки багатокритеріальних моделей оптимізації, спрямованих на максимізацію ліквідності двобічних ринків у реальному часі.

У роботі запропоновано та науково обґрунтовано представлення архітектури цифрової платформи у вигляді динамічного зваженого дводольного графа, що дозволило формалізувати процеси взаємодії між множинами споживачів та постачальників послуг як задачу потокової оптимізації у середовищі з мінливими параметрами. На відміну від традиційних підходів, розроблена модель інтегрує вектори характеристик ребер графа, що включають просторову віддаленість учасників, часові обмеження на виконання запитів та динамічні репутаційні оцінки, що забезпечує адекватне відображення реальних операційних процесів. Встановлено, що структурна цілісність платформи та її пропускна здатність визначаються топологічними властивостями відповідного графа, зокрема щільністю зв'язків та розподілом локальних концентрацій попиту.

Запропонований підхід до моделювання дозволяє не лише здійснювати декомпозицію складних ринкових структур на підграфи для паралелізації обчислень, а й виявляти критичні вузли, перевантаження яких призводить до деградації сервісу. Це створює методичну базу для розробки адаптивних механізмів матчингу, здатних оперативно реагувати на зміну конфігурації графа внаслідок появи нових вузлів або зміни вагових коефіцієнтів у реальному часі.

На основі апарату диференціальних рівнянь із зворотним зв'язком удосконалено математичну модель динаміки чисельності учасників платформи, що дозволило кількісно оцінити вплив мережевих ефектів на процеси залучення та утримання користувачів. В.В. Годлюком вперше формалізовано умови виникнення нелінійних переходів у стані системи, за яких незначні коливання зовнішнього попиту можуть призводити до втрати ліквідності двобічного ринку через лавиноподібний відтік постачальників послуг. Шляхом якісного аналізу розроблених моделей встановлено критичні пороги параметрів самовідтворення мережі, перевищення яких гарантує вихід платформи на режим сталого зростання. Доведено, що стабільність функціонування цифрових платформ у періоди високої волатильності забезпечується впровадженням динамічних регуляторів, які враховують інерційність реакції учасників та забезпечують збіжність траєкторій системи до цільового стану рівноваги. Одержані аналітичні залежності створюють теоретичну основу для побудови систем предикативного управління, здатних ідентифікувати ризики структурної деградації платформи на ранніх етапах та адаптувати параметри матчингу для їх нейтралізації.

У роботі сформульовано та розв'язано задачу багатокритеріального розподілу ресурсів цифрової платформи, де як фундаментальний інструмент збалансування інтересів учасників використано мінімаксний критерій. Математично обґрунтовано, що мінімізація максимального часу очікування у поєднанні з контролем рівномірності завантаження постачальників послуг дозволяє суттєво знизити структурну ентропію системи. Автором доведено, що використання індексу Джині як динамічного обмеження в оптимізаційній моделі забезпечує справедливий розподіл доходів, що є необхідною умовою запобігання монополізації ринку та підтримки високого рівня ліквідності. На основі синтезу методів декомпозиції графів та локального пошуку додаткових шляхів розроблено гібридний адаптивний алгоритм матчингу. Встановлено, що запропонована обчислювальна схема має квазілінійну складність, що дозволяє ефективно опрацьовувати масиви даних великої розмірності у темпі надходження запитів. Теоретично підтверджено та експериментально верифіковано, що такий підхід забезпечує збіжність алгоритму до глобально оптимального або близького до нього стану за час, що не перевищує критичний поріг у 50 мс, що є визначальним для функціонування високонавантажених цифрових сервісів у реальному часі.

Завершальним етапом дослідження стала побудова комплексу імітаційних моделей, що підтвердили адекватність і високу ефективність запропонованих теоретичних рішень. Експериментально верифіковано, що впровадження розроблених методів стохастичної оптимізації дозволяє підвищити точність прогнозування динаміки частки успішних парувань (Matching Rate) до 97%, що суттєво перевищує показники існуючих детермінованих моделей. У ході стрес-тестування алгоритмів у високонавантаженому режимі підтверджено їх здатність підтримувати стабільність платформи при критичних сплесках попиту, забезпечуючи при цьому зниження середнього часу очікування користувачів на 15–18%. Основні положення та результати роботи пройшли всебічну апробацію на міжнародних наукових конференціях. Сформований науково-методичний апарат є завершеним рішенням, готовим до використання при проєктуванні та модернізації цифрових сервісів нового покоління, орієнтованих на максимізацію соціально-економічного ефекту та технічну стійкість.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Cusumano M. A., Gawer A., Yoffie D. B. The Business of Platforms: Strategy in the Age of Digital Competition, Innovation, and Power. – New York : Harper Business, 2019. – 304 p. – ISBN 978-0-06-289632-2.

2. Zuboff S. The Age of Surveillance Capitalism: The Fight for a Human Future at the New Frontier of Power. – New York : PublicAffairs, 2019. – 704 p. – ISBN 978-1-61039-569-4.

3. Hein A., Schreieck M., Riasanow T., Soto Setzke D., Wiesche M., Böhm M., Krcmar H. Digital platform ecosystems: Case studies, analysis and a research agenda // Electronic Markets. – 2020. – Vol. 30. – P. 87–98.

4. Mayer-Schönberger V., Ramge T. Reinventing Capitalism in the Age of Big Data. – New York : Basic Books, 2018. – 288 p. – ISBN 978-0465093687.

5. Armstrong M. Competition in two-sided markets // The RAND Journal of Economics. – 2006. – Vol. 37, No. 3. – P. 668–691. – DOI: 10.1111/j.1756-2171.2006.tb00037.x.

6. Rochet J.-C., Tirole J. Platform Competition in Two-Sided Markets // Journal of the European Economic Association. – 2003. – Vol. 1, No. 4. – P. 990–1029. – DOI: 10.1162/154247603322493212.

7. Rochet J.-C., Tirole J. Two-Sided Markets: A Progress Report // The RAND Journal of Economics. – 2006. – Vol. 37, No. 3. – P. 645–667. – DOI: 10.1111/j.1756-2171.2006.tb00036.x.

8. Ministry of Digital Transformation of Ukraine. Ukraine’s IT Powerhouse 2024: From Resilience to Global Reach : Analytical Report. – Kyiv : Ministry of Digital Transformation of Ukraine, 2024. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://digitalstate.gov.ua/news/it-outsourcing/ukraines-it-powerhouse-2024-from-resilience-to-global-reach. — (дата звернення: 01.02.2026).

9. Динаміка цифрової трансформації України: основні тенденції та вплив на національну економіку // Актуальні проблеми розвитку економіки регіону. — 2025. – Вип. 2(21). – С. 267–280. – DOI: 10.15330/apred.2.21.267-280.

10. Горбачук В. М., Дунаєвський М. С., С.-Б. Сулейманов, Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Дунайський басейн як високотехнологічний транспортний коридор між Заходом та Сходом // Кібернетика та комп'ютерні технології. – 2024. – № 4. – С. 22–31. – DOI: 10.34229/2707-451X.24.4.2.

11. Годлюк В. В. Математичні моделі систем управління інформацією на цифрових платформах: від управління ресурсами до прогнозування попиту // Кібернетика та комп'ютерні технології. – 2025. – № 2. – С. 37–46. – DOI: 10.34229/2707-451X.25.2.3.

12. Delong S., Farhadi A., Niazadeh R., Sivan B., Udwani R. Online Bipartite Matching with Reusable Resources // Mathematics of Operations Research. – 2024. – Vol. 49, No. 3. – P. 1825–1854. – DOI: 10.1287/moor.2022.0242.

13. Asratian A. S., Denley T. M. J., Häggkvist R. Bipartite Graphs and their Applications. – Cambridge : Cambridge University Press, 1998. – 272 p. – (Cambridge Tracts in Mathematics ; Vol. 131). – DOI: 10.1017/CBO9780511984068.

14. Trofymchuk O., Bidiuk P., Terentiev O., Klymenko V. The methodology for adaptive modeling and forecasting nonlinear and nonstationary processes // Problems of Control and Informatics. – 2024. – Vol. 69, No. 1. – P. 63–79. – DOI: 10.34229/1028-0979-2024-1-6.

15. Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C. Introduction to Algorithms. – 4th ed. – Cambridge, MA : MIT Press, 2022. – 1312 p. – ISBN 978-0262046305.

16. Newman M. Networks. – 2nd ed. – Oxford : Oxford University Press, 2018. – 816 p. – ISBN 978-0198805090.

17. Згуровський М. З., Зайченко Ю. П. Системи і методи штучного інтелекту : монографія. – Київ : Академперіодика, 2025. – 744 p. – DOI: 10.15407/akademperiodyka.551.744.

18. Birge J. R., Louveaux F. Introduction to Stochastic Programming. – 2nd ed. – New York : Springer, 2011. – 485 p. – DOI: 10.1007/978-1-4614-0237-4.

19. Nesterov Y. Lectures on Convex Optimization. – 2nd ed. – Cham : Springer, 2018. – 576 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-91578-4.

20. Godliuk V., Golotsukova T. Digital platforms in the context of sustainable development: mathematical modeling, technological innovations, and investment prospects in the energy sector // Development of natural and technical sciences in the era of global transformations : collective monograph. – Riga : Baltija Publishing, 2025. – P. 114–132. - DOI: 10.30525/978-9934-26-575-4-29.

21. West D. B. Introduction to Graph Theory. – 2nd ed. – Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2001. – 512 p. – ISBN 978-0130144003.

22. Diestel R. Graph Theory. – 5th ed. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 2017. – 447 p. – DOI: 10.1007/978-3-662-53622-3.

23. Бідюк П. І., Тимощук О. Л., Коваленко А. Є., Коршевнюк Л. О. Системи і методи підтримки прийняття рішень : підручник для магістрів. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 610 с.

24. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. – Cambridge : Cambridge University Press, 2004. – 730 p. – DOI: 10.1017/CBO9780511804441.

25. Dantzig G. B. Linear Programming and Extensions. — Princeton, NJ : Princeton University Press, 1998. – 656 p. – DOI: 10.1515/9781400884179.

26. Лахно В., Малюков В., Малюкова І., Аткелди О., Криворучко О., Десятко А., Степашкіна К. Модель аналізу стратегій при динамічній взаємодії учасників фішингових атак // Кібербезпека: освіта, наука, техніка. – 2023. – Т. 4, № 20. – С. 124–141. – DOI: 10.28925/2663-4023.2023.20.124141.

27. Стецюк П. І., Григорак М. Ю., Стовба В. О. та ін. Методи негладкої оптимізації в прикладних задачах : монографія. – Київ : Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2023. – 312 p. – ISBN 978-617-8268-00-8

28. Bertsimas D., Brown D. B., Caramanis C. Theory and Applications of Robust Optimization // SIAM Review. – 2011. – Vol. 53, No. 3. – P. 464–501. – DOI: 10.1137/080734510.

29. Бідюк П. І., Романенко В. Д., Тимощук О. Л. Аналіз часових рядів : навч. посіб. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 600 с.

30. Горбачук В. М., Ніколенко Д. І., Рибачок Д. О. Організація онлайн-торгів з багатьма учасниками: математична модель та алгоритми координації // Наука і техніка сьогодні. – 2024. – № 8(36). – С. 45–58.

31. Lakhno V., Malyukov V., Bochulia T., Hipters Z. Model of managing the procedure of mutual financial investing in information technologies and smart city // International Journal of Civil Engineering and Technology. – 2018. – Vol. 9, No. 8. – P. 1802–1810.

32. Tirole J. The Theory of Industrial Organization. – Cambridge, MA : MIT Press, 1988. – 496 p.

33. Knuth D. E. The Art of Computer Programming. Vol. 1: Fundamental Algorithms. – 3rd ed. – Reading, MA : Addison-Wesley, 1997. – 672 p. – ISBN 978-0-201-89683-1.

34. Yang Z., Ge Z. On paradigm of industrial big data analytics: From evolution to revolution // IEEE Transactions on Industrial Informatics. – 2022. – Vol. 18, No. 12. – P. 8373–8388.

35. Nayyar G., Pleninger R., Vorisek D., Yu S. Digitalization and inclusive growth: A review of the evidence [Electronic resource]. – Washington, DC : World Bank, 2024. – 68 p. – Available at: https://openknowledge.worldbank.org/server/api/core/bitstreams/811165b6-3c51-4acb-8e09-9f5aa6364106/content (дата звернення: 01.02.2026)

36. Evans D. S. The antitrust economics of multi-sided platform markets // Yale Journal on Regulation. – 2003. – Vol. 20, No. 2. – P. 325–381.

37. Міністерство цифрової трансформації України. Офіційний вебсайт та аналітичні матеріали з цифрової трансформації в Україні [Електронний ресурс]. – 2024. – Режим доступу: https://thedigital.gov.ua/ (дата звернення: 01.02.2026).

38. Parker G. G., Van Alstyne M. W., Choudary S. P. Platform Revolution: How Networked Markets Are Transforming the Economy and How to Make Them Work for You. – New York : W. W. Norton & Company, 2016. – 352 p. – ISBN 978-0-393-35435-5.

39. Gross J. L., Yellen J., Anderson M. Graph Theory and Its Applications. – 3rd ed. – New York : Chapman & Hall/CRC, 2018. – 591 p. – ISBN 978-1-4822-4948-4. – DOI: 10.1201/9780429425134.

40. Ruutu S., Casey T., Kotovirta V. Development and competition of digital service platforms: A system dynamics approach // Technological Forecasting and Social Change. – 2017. – Vol. 115. м P. 250–259. – DOI: 10.1016/j.techfore.2016.12.011.

41. Strogatz S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. – 2nd ed. – Boulder, CO : Westview Press, 2015. – 512 p. – ISBN 978-0-8133-4910-7.

42. Ehrgott M. Multicriteria Optimization. – 2nd ed. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 2005. – 323 p. – ISBN 978-3-540-21398-7.

43. Stetsyuk P. I., Stovba V. O., Khomiak O. M., Stetsyuk M. G. Two-stage transportation problem with two-sided constraints on consumer demands and upper bounds for capacity of intermediate points // Cybernetics and Systems Analysis. – 2024. – Vol. 60. – P. 919–929.

44. Parker G., Van Alstyne M. Platforms: Their structure, benefits, and challenges // Introduction to Digital Humanism / ed. by H. Werthner et al. – Cham : Springer, 2024. – P. 389–402. – DOI: 10.1007/978-3-031-45304-5_33.

45. Glover F. W., Kochenberger G. A. (eds.). Handbook of Metaheuristics. – Boston : Springer, 2003. – 557 p. – ISBN 978-1-4020-7263-5.

46. Ananny M., Crawford K. Seeing without knowing: Limitations of the transparency ideal and its application to algorithmic accountability // New Media & Society. – 2018. – Vol. 20, No. 3. – P. 973–989. – DOI: 10.1177/1461444816676645.

47. Infanger G. Planning under uncertainty: Solving large-scale stochastic linear programs. – Danvers : Boyd & Fraser, 1994. – 188 p. – ISBN 10: 0894262491.

48. Kall P., Mayer J. Stochastic Linear Programming. — 2nd ed. – New York : Springer, 2011. – 297 p. – ISBN 978-1-4419-7728-1. – DOI: 10.1007/978-1-4419-7729-8.

49. Tiwana A. Platform Ecosystems: Aligning Architecture, Governance, and Strategy. – Amsterdam : Morgan Kaufmann, 2013. – 312 p. – ISBN 978-0-12-408066-9.

50. Hagiu A., Wright J. Multi-sided platforms // International Journal of Industrial Organization. – 2015. – Vol. 43. – P. 162–174. – DOI: 10.1016/j.ijindorg.2015.03.003.

51. Katz M. L., Shapiro C. Network externality, adoption, and product compatibility // The American Economic Review. – 1985. – Vol. 75, No. 3. – P. 424–440.

52. Varian H. R. Intermediate Microeconomics: A Modern Approach. – 9th ed. – New York : W. W. Norton & Company, 2014. – 758 p. – ISBN 978-0-393-91967-7.

53. Easley D., Kleinberg J. Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 744 p. – ISBN 9780511761942. – https://doi.org/10.1017/CBO9780511761942.

54. Ляшенко І. М., Коробова М. В., Столяр А. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів : навч. посіб. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 р. – ISBN 966-692-824-8.

55. Fudenberg D., Tirole J. Game Theory. – Cambridge, MA : MIT Press, 1991. – 578 p. – ISBN 978-0-262-06141-4.

56. Nash J. Non-cooperative games // Annals of Mathematics. – 1951. – Vol. 54, No. 2. – P. 286–295. – DOI: 10.2307/1969529.

57. Nisan N., Roughgarden T., Tardos E., Vazirani V. V. (eds.). Algorithmic Game Theory. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011. – 774 p. – https://doi.org/10.1017/CBO9780511800481

58. Milgrom P. Putting Auction Theory to Work. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 384 p. – https://doi.org/10.1017/CBO9780511813825

59. Bondy J. A., Murty U. S. R. Graph Theory. – London : Springer, 2008. – 651 p. – ISBN 978-1-84628-969-9. – DOI: 10.1007/978-1-84628-970-5.

60. Wilson R. J. Introduction to Graph Theory. – 5th ed. – Harlow : Longman, 2010. – 184 p. – ISBN 978-0-273-72889-4.

61. Gallo G., Grigoriadis M. D., Tarjan R. E. A fast parametric maximum flow algorithm and applications // SIAM Journal on Computing. – 1989. – Vol. 18, No. 1. – P. 30–55. – DOI: 10.1137/0218003.

62. Baccelli F., Błaszczyszyn B. Stochastic geometry and wireless networks. Vol. 1: Theory. – Hanover, MA : Now Publishers, 2009. – 201 p. – ISBN 978-1-60198-264-3. – DOI: 10.1561/1300000006.

63. Volterra V. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together // Journal du Conseil. – 1928. – Vol. 3, No. 1. – P. 3–51. – DOI: 10.1093/icesjms/3.1.3.

64. Hofbauer J., Sigmund K. Evolutionary Games and Population Dynamics. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 351 p. – ISBN 9781139173179. – DOI: 10.1017/CBO9781139173179.

65. Sandholm W. H. Population Games and Evolutionary Dynamics. – Cambridge, MA : MIT Press, 2010. – 616 p.

66. Weibull J. W. Evolutionary Game Theory. – Cambridge, MA : MIT Press, 1995. – 288 p.

67. Arnold V. I. Ordinary Differential Equations. – Cambridge, MA : MIT Press, 1992. – 338 p.

68. Hall J. V., Krueger A. B. An analysis of the labor market for Uber's driver-partners in the United States // ILR Review. – 2018. – Vol. 71, No. 3. – P. 705–732. – DOI: 10.1177/0019793917717222.

69. Chen M. K., Rossi P., Weintraub G. Y., Nosko C. Dynamic pricing in a shared mobility platform: Information and control // Management Science. – 2021. – Vol. 67, No. 1. – P. 116–134. – DOI: 10.1287/mnsc.2019.3485.

70. Uklon. Year-end results and operational statistics. [Electronic resource]. – Kyiv, 2025. – Available at: https://uklon.com.ua/en/news/ (accessed: 01.02.2026).

71. Resnick P., Zeckhauser R., Friedman E., Kuwabara K. Reputation systems // Communications of the ACM. – 2000. – Vol. 43, No. 12. – P. 45–48.

72. Lyft. The year in data: How, when, and where we got around in 2022 [Electronic resource]. – San Francisco, 2023. – Available at: https://www.lyft.com/blog/posts/the-year-in-data-2022 (accessed: 01.02.2026).

73. Chopra S., Meindl P. Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation. – 7th ed. м Harlow : Pearson, 2018. – 528 c. – ISBN 978-1-292-25791-4.

74. Kuhn H. W. The Hungarian method for the assignment problem // Naval Research Logistics Quarterly. – 1955. Vol. 2. – P. 83–97. – DOI: 10.1002/nav.3800020109.

75. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. – Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 1993. – 864 p.

76. Sundararajan D. Signals and Systems: A Practical Approach. – Cham : Springer, 2023. – 473 p. – ISBN 978-3-031-46647-0. – DOI: 10.1007/978-3-031-46648-7.

77. Khalil H. K. Nonlinear Systems. – 3rd ed. – Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2002. – 750 p. – ISBN 0-13-067389-7 (9780130673893).

78. Kelly F. P. Reversibility and Stochastic Networks. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011. – 242 p.

79. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications. – New York : Springer-Verlag, 1976. – 407 p. – ISBN 978-0-387-90200-5.

80. Spielman D. A., Srivastava N. Graph sparsification by effective resistances [Electronic resource]. – arXiv preprint arXiv:0803.0929v4, 2009. – 14 p. – DOI: 10.48550/arXiv.0803.0929.

81. Yu H., Kaminsky M., Gibbons P. B., Flaxman A. SybilGuard: Defending against sybil attacks via social networks // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. – 2006. – Vol. 36, No. 4. – P. 267–278. – DOI: https://doi.org/10.1145/1151659.1159945

82. Lawler E. L. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. – New York : Dover Publications, 2001. – 384 p.

83. Lovász L. Combinatorial Problems and Exercises. – 2nd ed. – Amsterdam : North-Holland, 1993. – 636 p.

84. Murota K. Discrete Convex Analysis. – Philadelphia : SIAM, 2003. – 411 p.

85. Wolsey L. A., Nemhauser G. L. Integer and Combinatorial Optimization. – New York : Wiley, 1999. – 784 p. – DOI: 10.1002/9781118627372

86. Miettinen K. Nonlinear Multiobjective Optimization. – Boston : Kluwer Academic Publishers, 1999. – 298 p. – ISBN 978-0-7923-8278-2. - DOI: 10.1007/978-1-4615-5563-6.

87. Gorbachuk V., Dunaievskyi M., Suleimanov S.-B. Models of group decision making and their applications // Information Technologies and Their Applications (ITTA 2024) : proceedings of the 2nd International Conference (Baku, 23–25 April 2024). – Baku : Institute of Control Systems, 2024. – P. 1–6. – DOI: 10.54381/itta2024.12

88. Schrijver A. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 2003. – 1881 p.

89. Jaillet P., Lu X. Near-optimal online algorithms for dynamic resource allocations [Electronic resource]. – arXiv:1208.2596, 2012. – Available at: https://arxiv.org/abs/1208.2596

90. Bertsimas D., Tsitsiklis J. N. Introduction to Linear Optimization. – Belmont, MA : Athena Scientific, 1997. – 608 p.

91. Bertsekas D. P. Network Optimization: Continuous and Discrete Models. – Belmont, MA : Athena Scientific, 1998. – 608 p.

92. Luenberger D. G., Ye Y. Linear and Nonlinear Programming. – 4th ed. – Cham : Springer, 2016. – 605 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-18842-3.

93. Vanderbei R. J. Linear Programming: Foundations and Extensions. – 5th ed. – Cham : Springer, 2020. – 471 p. – DOI: 10.1007/978-3-030-39415-8.

94. Wright S. J., Recht B. Optimization for Data Analysis. – Cambridge : Cambridge University Press, 2022. – 218 p. – DOI: 10.1017/9781316671658.

95. Hager W. W., Pardalos P. M. (eds.). Network Optimization. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 1997. – 488 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-59179-2.

96. Ford L. R., Fulkerson D. R. Flows in Networks. – Princeton : Princeton University Press, 2010. – 210 p. – DOI: 10.1515/9781400837519.

97. Hoffman A. J., Kruskal J. B. Integral boundary points of convex polytopes // Linear Inequalities and Related Systems / ed. by H. W. Kuhn, A. W. Tucker. – Princeton : Princeton University Press, 1956. – P. 223–246.

98. Forrest J. J., Goldfarb D. Steepest-edge simplex algorithms for linear programming // Mathematical Programming. – 1992. – Vol. 57. – P. 341–374. – DOI: 10.1007/BF01581089.

99. Rockafellar R. T. Convex Analysis. – Princeton : Princeton University Press, 1970. – 451 p. – DOI: 10.1515/9781400873173.

100. Ben-Tal A., El Ghaoui L., Nemirovski A. Robust Optimization. – Princeton : Princeton University Press, 2009. – 542 p. – DOI: https://doi.org/10.1515/9781400831050

101. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory. – Philadelphia : SIAM, 2009. – 436 p.

102. Berge C. Graphs and Hypergraphs. – Amsterdam : North-Holland, 1973. – 528 p.

103. Bellman R. Dynamic Programming. – Princeton : Princeton University Press, 1957. – 342 p.

104. Powell W. B. Approximate Dynamic Programming: Solving the Curses of Dimensionality. – 2nd ed. – Hoboken : Wiley, 2011. – 656 p. – DOI: https://doi.org/10.1002/9781118029176

105. Bertsekas D. P. Dynamic Programming and Optimal Control. – 4th ed. – Belmont : Athena Scientific, 2017. – 1216 p. – ISBN 978-1-886529-44-1.

106. Smagulova D., Samaitis V., Jasiuniene E. Convolutional neural network for interface defect detection in adhesively bonded dissimilar structures // Applied Sciences. – 2024. Vol. 14, No. 22. – Art. 10351. – DOI: https://doi.org/10.3390/app142210351

107. Lynch N. A. Distributed Algorithms. – San Francisco : Morgan Kaufmann, 1996. – 872 p. – ISBN 978-1-55860-348-6.

108. Bardadym T. A., Osypenko S., Gorbachuk V., Lefterov O. Modern ways to organize computations in cloud environment // Problems of Cybernetics and

Informatics (PCI 2023) : proceedings of the 7th International Conference (Baku, 28–30 August 2023). – Baku : Institute of Control Systems, 2023. – P. 1–5. – DOI: 10.54381/pci2023.04.

109. Edmonds J. Paths, trees, and flowers // Canadian Journal of Mathematics. – 1965. – Vol. 17. – P. 449–467. – DOI: 10.4153/CJM-1965-045-4.

ДОДАТКИ

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Публікації у наукових виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus

1. Gorbachuk V., Dunaievskyi M., Suleimanov S.-B., Godliuk V., Rubachok D. The Danube basin as the high-tech East-West transport corridor // 3rd International Conference on Problems of Logistics, Management and Operation in the East-West Transport Corridor. PLMO 2024.P. 60-64 DOI: 10.1109/PLMO62307.2024.10887176.
2. Gorbachuk V., Bardadym T., Dunaievskyi M., Suleimanov S.-B., Godliuk V., Rubachok D. Transport Corridors and Trade Barriers // In: Abbasov A., Sladkovski A. A., Babayev T. Problems of Logistics, Management and Operation in the East-West Transport Corridor. PLMO 2025. P. 94-106. DOI: 10.1007/978-3-032-13672-5_9.

Статті у наукових виданнях, включених на дату опублікування до переліку наукових фахових видань України за спеціальністю 113

3. Горбачук В. М., Дунаєвський М. С., Сулейманов С.-Б., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Дунайський басейн як високотехнологічний транспортний коридор між Заходом та Сходом // Cybernetics and Computer Technologies. 2024. № 4. С. 22–31. DOI: 10.34229/2707-451X.24.4.2.
4. Годлюк В. В. Математичні моделі для інформаційних систем управління на цифрових платформах: від управління ресурсами до прогнозування попиту // Cybernetics and Computer Technologies. 2025. №2. С. 37–46. DOI: 10.34229/2707-451X.25.2.3.
5. Годлюк В. В. Застосування методів теорії ігор для аналізу взаємодії валідаторів у proof-of-stake блокчейн-системах // Cybernetics and Computer Technologies. 2026. № 1. С. 16–27. DOI: 10.34229/2707-451X.26.1.2.

6. Godliuk V. Mathematical model for load balancing on digital platforms based on queueing theory and resource allocation optimization // Problems of Control and Informatics. 2026. Vol. 71, № 1. P. 5–13. DOI: 10.34229/1028-0979-2026-1- 1.

Розділи у монографіях, виданих у державах ЄС

7. Rybachok D., Godliuk V., Kushnir O. Nuclear informatics: key technologies and modeling // Education economy and AI: multidisciplinary perspectives for a digital future. Monograph. Katowice: The University of Technology in Katowice Press, 2025. P. 540-551. ISBN 978-83-68422-04-7. DOI: 10.54264/M051.

8. Bardadym T., Godliuk V. International experience in the formation of electricity markets: lessons for the reconstruction of the Ukrainian energy system in the face of military challenges // Economics and Management in Conditions of Military Challenges: Collective monograph. Riga: Baltia Publishing, 2025. P. 1-13. ISBN 978-9934-26-628-7. DOI: https://doi.org/10.30525/978-9934-26-628-7-1.

9. Godliuk V., Golotsukova T. Digital platforms in the context of sustainable development: mathematical modeling, technological innovations, and investment prospects in the energy sector // Strategic Priorities for Sustainable Development in the Context of Global Economic Transformation: Scientific monograph. Riga: Baltia Publishing, 2025. P. 768–790. ISBN 978-9934-26-575-4. DOI: 10.30525/978-9934-26-575-4-29.

Список публікацій здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

10. Годлюк В. Математичне моделювання стійкості освітніх екосистем у кризових умовах з використанням цифрових платформ // Edukacja i społeczeństwo X. Zbiór prac naukowych. Akademia Śląska: Wydawnictwo Wyższej Szkoły Technicznej w Katowicach, Polska, 2026. С. 363–370. ISBN 978-83-68422-14-6. DOI: 10.54264/M058.

11. Горбачук В., Годлюк В., Рибачок Д. Від сигналів, мов, письма, бібліотек, 2D-друку, Інтернету до ноосфери, клонування, 3D-друку, ChatGPT, N-комп’ютеризації та технологічної сингулярності. // Інтелектуальне надбання

академіка Володимира Вернадського і світова фізико-економічна думка / ред. В. В. Небрат. Київ : КНЕУ, 2023. С. 39–43. ISBN 978-966-926-436-7.

12. Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Шляхи розуміння України // 5th International Scientific and Practical Internet Conference "Integration of Education, Science and Business in Modern Environment: Summer Debates" devoted to the search for latest ideas for development at international, national and regional levels. August 3–4, 2023, Dnipro, Ukraine. С. 167–169. ISBN 978-617-8293-07-9.

13. Годлюк В. В. Ефективність логістики країн Дунайського басейну // Статистичні методи та інформаційні технології аналізу соціально-економічного розвитку. 2024. С. 174–176. ISBN 978-617-7572-78-6.

14. Годлюк В. В. Інформаційні технології: ключ до безпечного та ефективного розмінування // Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання. 2024. С. 15– 16. ISBN 978-966-640-560-2.

15. Годлюк В. В. Освіта та фондові ринки: інтеграція штучного інтелекту та сучасних технологій // Міжнародна науково-методична Інтернет-конференція, присвячена вирішенню математичних викликів сучасності, 20–22 червня 2024 року. Вінниця: Вінницький національний технічний університет, 2024. С. 193– 196. ISBN 978-617-8163-15-0.

16. Горбачук В., Ніколенко Д., Годлюк В., Рибачок Д. Про цільові реконфігурації мереж // Комбінаторні конфігурації та їхні застосування: матеріали XXVI Міжнародного науково-практичного семінару, присвяченого пам’яті професора Донця Г.П. (13–15 червня 2024р., Кропивницький–Запоріжжя–Київ, Україна) / ред. Л. Ф. Гуляницький. Кропивницький: Центральноукраїнський національний технічний університет. 2024. С. 34–43. ISBN 978-617-7942-27-5.

17. Golotsukova T., Godliuk V. Risks, resilience, and critical infrastructure management: digital, environmental and social aspects // Innovation and digital transformation: education, economy and society dimensions. Monograph. Katowice: The University of Technology in Katowice Press, 2025. P. 286–292. ISBN 978-83-68422-09-2. DOI: 10.54264/M054.

18. Горбачук В., Ніколенко Д., Годлюк В., Рибачок Д. Соціалізація, інвестиції у засоби комунікацій, переванатаження та економічне регулювання черг // Izobraževanje in družba IX: zbornik konference. Prešov: Univerza v Prešove, Slovakia, 2024. С. 170–181. ISBN 978-80-555-3353-7.

19. Горбачук В., Осипенко С., Годлюк В., Рибачок Д. Е-відкриття для функції законності та правопорядку // Когнітивні дослідження: результати, виклики та перспективи (24 травня 2024 р., Київ, Україна) / ред. В. Є. Синиця. Київ : КНУ імені Тараса Шевченка; Каравелла. 2024. С. 124–133. ISBN 978-960-801-899-0.

20. Gorbachuk V. M., Godliuk V. V., Nikolenko D. I. To optimal contracts under uncertainty // IX International Conference on Decision Making under Uncertainty (PDMU-2025), September 30 - October 1. 2025. Bielsko-Biala, Poland. P. 63-64. ISBN 978-615-355-310-7.

21. Горбачук В. М., Ніколенко Д. І., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Соціалізація, інвестиції у засоби комунікацій, перенавантаження та економічне регулювання черг. Vzdelávanie a spoločnosť. Prešovská univerzita v Prešove. R.Bernatova, T. Nesterenko. Prešov, 2024. С. 169–180.

22. Горбачук В. М., Батіг Л. О., Годлюк В. В. Застосування мережевих ефектів цифровими платформами // Контроль і управління в складних системах (15–17 жовтня 2022 р., Вінниця). Вінниця : ВНТУ, 2022.

23. Горбачук В. М., Годлюк В. В. Мережеві ефекти цифрових платформ // Інноваційні ідеї в економічній науці: пошуки вирішення сучасних проблем. Київ : НаУКМА, 2022. С. 15–17.

24. Горбачук В., Годлюк В., Рибачок Д. Застосування інтелектуального аналізу даних // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2023): тези доповідей XXI Міжнародної науково-практичної конференції (Дніпро, 22–24 листопада 2023 р.) / під заг. ред. О. М. Кисельової. Дніпро: ДНУ. 2023. С. 107–108.

25. Годлюк В. В. Інвестиції у забезпечення безпеки: розмінування як шлях до стабільності // Піонер кібернетики академік В. М. Глушков: ідеї для

майбутнього. До 100-річчя з дня народження В. М. Глушкова : матеріали 12-ої Міжнар. наук.-практ. конф. «Глушковські читання». Київ, 2023. С. 20-24.

26. Горбачук В. М., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Глобальне співробітництво ЄС та Японії в економічній безпеці // Інноваційні ідеї в економічній науці: пошуки вирішення сучасних проблем / Національний університет «Києво-Могилянська академія», кафедра економічної теорії, Науково-навчальний центр «Інноваційна лабораторія» НаУКМА. Київ: НаУКМА. 2023. С. 24–25.

27. Годлюк В., Ніколенко Д., Рибачок Д. Еволюційне моделювання фінансової сфери та його використання // II International Scientific and Practical Conference «Information Systems and Technologies: Results and Prospects» (IST-2024), March 6, 2024. Київ: FIT TSNUK. 2024. С. 142–146.

28. Горбачук В. М., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Ринок для штучного інтелекту // Системи та засоби штучного інтелекту: тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Штучний інтелект: досягнення, методи та ризики». Київ: ІПШІ «Наука і освіта», 15–16 березня 2024 р. С. 41–45.

29. Горбачук В. М., Ніколенко Д. І., Пустовойт М. М., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Смарт-контракти в енергетиці // Науково-практична конференція «Використання блокчейн-технологій в енергетиці». Київ : ПІМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України, 5 червня 2024 р., С. 6-10.

30. Горбачук В. М., Бардадим Т. О., Дунаєвський М. С., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Основи децентралізованих ринків електроенергії // Використання блокчейн-технологій в енергетиці – 2025: збірник матеріалів науково-практичної конференції (м. Київ, 26 березня 2025 р.). Київ: ПІМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. 2025. С. 15-18.

31. Горбачук В. М., Дунаєвський М. С., Осипенко С. П., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Менеджмент ризиків для прикладної безпеки // VI-і читання Анатолія Вадимовича Свідзинського: матеріали доповідей (м. Луцьк, 28 лютого – 1 березня 2025 р.). Луцьк. 2025. С. 35–37.

32. Годлюк В. В. Модель Леонтьєва-Форда як інструмент аналізу ресурсів у цифрових платформах // VI-і читання Анатолія Вадимовича Свідзинського: матеріали доповідей (м. Луцьк, 28 лютого – 1 березня 2025 р.). Луцьк, 2025. С. 32–34.

33. Горбачук В. М., Годлюк Г. В., Ніколенко Д. І., Годлюк В. В., Ніколенко Д. Я. Резильєнтність систем за даними індикаторів. // Резильєнтність динамічних систем, науково-практична конференція Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук України : матеріали (Київ, 27 грудня 2024 р.). Київ : ІПМЕ ім. Г.Є.Пухова НАН України, 2024. С. 26-31.

34. Gorbachuk V. M., Nikolenko D. I., Godliuk V. V., Rybachok D. O. Sensitivity of goal function in r-facility interdiction covering problem and systemic risk // 3rd Workshop on Reliability Engineering and Computational Intelligence (RECI-2024) (November 6–11, 2024, Žilina, Slovakia). – Žilina : IEEE Chapter of Reliability Society of the Czechoslovakia Section ; European Safety and Reliability Association (ESRA); Slovak Research and Development Agency; Institute of Information Technologies ; University of Žilina. 2024. P. 45.

35. Годлюк В. В. Еволюційні обчислення в економіці та їх застосування // Актуальні питання фінансової політики України задля забезпечення фінансової стабільності (22 лютого 2024р., Київ, Україна). Київ: НаУКМА. 2024. С. 30 –34.

36. Годлюк В. В. Математичне моделювання та алгоритмічні підходи до оптимізації роботи цифрових платформ у контексті інтелектуальних систем // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (20–22 листопада 2024 р., Дніпро). Дніпро: ДНУ ім. О. Гончара. 2024. С. 101–102.

37. Горбачук В. М., Годлюк В. В., Ніколенко Д. І., Годлюк В. В., Рибачок Д. О. Послуги з погляду цифрового десятиліття // Безпека енергетики в епоху цифрової трансформації (13 грудня 2024 р., Київ, Україна). Київ: Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України. 2024. С. 91-94

38. Годлюк В. В. Алгоритми ідентифікації аномалій у динамічних цифрових платформах з використанням методів машинного навчання // Резильєнтність динамічних систем, науково-практична конференція Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук України: матеріали (Київ, 27 грудня 2024 р.). Київ: ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України. 2024. С. 154-157.

39. Горбачук В. М., Бардадим Т. О., Дунаєвський М. С., Годлюк В. В., Голоцукова Т. Г., Рибачок Д. О. Програмне забезпечення для цифрових систем ядерних реакторів // XXXII щорічна наукова конференція Інституту ядерних досліджень НАН України : анотації до доповідей (м. Київ, 26–30 травня 2025 р.). Київ: Ін-т ядерних досліджень НАН України. 2025. С. 102-103.

Додаток Б

Алгоритмічна реалізація чисельного інтегрування системи динаміки залучення учасників та побудови фазового портрета

У даному додатку наведено скрипт чисельного розв’язання системи диференціальних рівнянь (2.2), яка описує взаємодію кількості активних запитів (U) та провайдерів (V). Код застосовується як інструмент верифікації властивостей стійкості моделі та візуалізації фазових траєкторій у просторі станів для різних початкових умов. Обчислення проводилися у середовищі Python з використанням стандартних пакетів наукових обчислень (numpy, matplotlib), що забезпечує повну відтворюваність результатів.

```
"""
Скрипт чисельного інтегрування системи динаміки залучення учасників (2.2) та побудови фазового портрета для верифікації властивостей стійкості моделі.
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def system_dynamics(state, t, alpha, beta, gamma, delta):
    """
    Система диференціальних рівнянь динаміки платформи:
    dU/dt = alpha*U - beta*U*V  (приріст запитів з урахуванням взаємодії)
    dV/dt = delta*U*V - gamma*V (залучення провайдерів залежно від попиту)
    """
    U, V = state
    d_udt = alpha * U - beta * U * V
    d_vdt = delta * U * V - gamma * V
    return [d_udt, d_vdt]

# Параметри моделі (калібровані згідно табл. 2.1)
```

```
alpha, beta = 1.1, 0.4
gamma, delta = 0.4, 0.1

# Побудова сітки фазового простору
u_range = np.linspace(0, 15, 20)
v_range = np.linspace(0, 15, 20)
U_grid, V_grid = np.meshgrid(u_range, v_range)

# Обчислення векторного поля
dU, dV = system_dynamics([U_grid, V_grid], 0, alpha, beta, gamma, delta)

# Візуалізація фазового портрета
plt.figure(figsize=(10, 8))
plt.streamplot(U_grid, V_grid, dU, dV, color='gray', alpha=0.5, density=1.5)

# Моделювання траєкторій для різних початкових умов
initial_conditions = [[5, 2], [8, 5], [12, 10]]
t = np.linspace(0, 50, 1000)
colors = ['blue', 'green', 'red']

for idx, start_point in enumerate(initial_conditions):
    solution = odeint(system_dynamics, start_point, t, args=(alpha, beta, gamma, delta))
    plt.plot(solution[:, 0], solution[:, 1], color=colors[idx],
             label=f'Траєкторія {idx+1}: U={start_point[0]}, V={start_point[1]}')
    plt.plot(start_point[0], start_point[1], 'ko')

# Точка рівноваги
u_eq = gamma / delta
v_eq = alpha / beta
plt.plot(u_eq, v_eq, 'r*', markersize=15, label='Точка рівноваги (Optimum)')
```

```
plt.xlabel('Кількість запитів клієнтів (U)', fontsize=12, fontname='serif')
plt.ylabel('Кількість доступних провайдерів (V)', fontsize=12, fontname='serif')
plt.title('Фазовий портрет динамічної стійкості цифрової платформи', fontsize=14)
plt.legend(loc='upper right')
plt.grid(True, linestyle=':', alpha=0.7)
plt.show()
```

Додаток В

Специфікація обчислювальних процедур та параметри верифікації моделей

У цьому додатку систематизовано методологію, параметри та статистичні процедури, застосовані під час проведення чисельних експериментів для верифікації запропонованих математичних моделей та алгоритмів (розділи 2–3). Експерименти виконувалися у вигляді алгоритмічних процедур з використанням стандартних інструментів наукових обчислень, що забезпечило строгу відтворюваність результатів та відповідність вимогам відкритої науки.

1. Структура обчислювальної процедури

Верифікація проводилася схемою:

- Генерація вхідних даних – формування стохастичних сценаріїв надходження запитів, розподілу локацій учасників та характеристик провайдерів на основі емпірично каліброваних ймовірнісних розподілів.
- Побудова динамічної графової моделі – оновлення множини вершин, допустимих ребер та вагових коефіцієнтів відповідно до поточного стану системи з урахуванням просторово-часових обмежень (розділ 2.1).
- Застосування алгоритмів оптимізації – виконання запропонованого гібридного алгоритму матчингу (розділ 3.3) з розв’язанням локальних підзадач методами лінійного та стохастичного програмування.
- Статистична агрегація результатів – фіксація ключових метрик ефективності, розрахунок довірчих інтервалів та перевірка статистичної значущості відмінностей між методами.

2. Параметризація сценаріїв навантаження

Експерименти базувалися на трьох режимах, параметри яких узгоджені з табл. 3.2:

Базовий: $\lambda = 10 - 25$ запитів/хв, тривалість 8 год, стабільна кількість провайдерів.

Піковий: $\lambda = 50\text{–}\ 120$ запитів/хв, амплітуда коливань ±40%, тривалість 2 год.

Стресовий: $\lambda > 250$ запитів/хв, разові сплески до 300%, тривалість 30–60 хв.

Для кожного сценарію генерувалися $N = 100$ незалежних реалізацій з різними початковими умовами та незалежними генераторами псевдовипадкових чисел.

3. Методи розрахунку метрик ефективності

У кожній ітерації обчислювалися такі показники:

- Середній та 95-й процентіль часу очікування T_{wait}

$$T_{wait} = \frac{1}{\mid M \mid} \sum_{(i,j)\in M} t_{i,j}\,, \qquad P_{95} = quantile_{95}\big(\{t_{i,j}\}\big)$$

- Коефіцієнт Джині завантаження провайдерів G:

$$G = \frac{\sum_{j=1}^{|V|} \sum_{k=1}^{|V|} \left|L_j - L_k\right|}{2|V| \sum_{j=1}^{|V|} L_j}$$

де L_j – сумарне навантаження провайдера j.

- Частка відхилених запитів

$$R_{\text{reject}} = \frac{\left|U_{\text{rejected}}\right|}{\left|U_{\text{total}}\right|} \cdot 100\%$$

4. Калібрування параметрів

Калібрування виконувалося шляхом мінімізації функціоналу відхилення між теоретичними прогнозами динамічної системи (2.2) та результатами чисельного інтегрування. Інтервали між запитами моделювалися експоненціальним розподілом $Exp(\lambda)$, час обслуговування – лог-нормальним $LN\ (\mu, \sigma^2)$.

Додаток Г

Алгоритмічна реалізація процедур геокластеризації та локального матчингу

Цей додаток містить алгоритмічні процедури на мові Python для реалізації етапу просторової декомпозиції (геокластеризації) та етапу точного локального матчингу на основі теорії потоків у мережах. Код застосовується як інструмент чисельної верифікації алгоритмів, описаних у розділі 3.3, і базується на стандартних бібліотеках наукових обчислень (scikit-learn, networkx, numpy).

Г.1. Процедура геокластеризації на основі алгоритму DBSCAN

Фрагмент відповідає за поділ множини запитів U та провайдерів V на локальні кластери залежно від щільності їх розташування. Використання scikit-learn забезпечує ефективне виявлення просторових зон попиту та ідентифікацію учасників, що потребують міжкластерного поліпшення.

```
import numpy as np
from sklearn.cluster import DBSCAN

def perform_geoclustering(points, epsilon_km=1.5, min_samples=2):
    """
    Просторове розбиття учасників на географічні кластери.
    epsilon_km: радіус околиці в кілометрах.
    Повертає мітки кластерів та кількість виділених зон.
    """
    # Перерахунок радіуса в радіани для використання з метрикою haversine
    kms_per_radian = 6371.0088
    epsilon_rad = epsilon_km / kms_per_radian

    # Використання алгоритму DBSCAN
    db = DBSCAN(eps=epsilon_rad, min_samples=min_samples,
                algorithm='ball_tree', metric='haversine').fit(np.radians(points))
```

```
        labels = db.labels_
        n_clusters = len(set(labels)) - (1 if -1 in labels else 0)
        return labels, n_clusters

    # Точки: [широта, довгота]
    # labels == -1 позначає учасників на периферії, які обробляються
на етапі міжкластерного поліпшення
```

Г.2. Процедура локального матчингу (алгоритм параметричного потоку)

Фрагмент реалізує пошук оптимальних призначень усередині кластера через зведення задачі до знаходження максимального потоку мінімальної вартості (Min-Cost Max-Flow). Використання бібліотеки networkx дозволяє точно розв'язувати підзадачі оптимізації у межах локальних зон, що є ключовим етапом верифікації складності та якості запропонованого гібридного підходу.

```
    import networkx as nx

    def     solve_local_matching(demand_nodes,     supply_nodes,
weight_matrix):
        """
        Побудова  двобічного  графа  та  знаходження  оптимального
матчингу
        у межах кластера.
        """
        G = nx.DiGraph()
        source, sink = 's', 't'

        # Додавання ребер від джерела до запитів та від провайдерів
до стоку
        for u in demand_nodes:
            G.add_edge(source, u, capacity=1, weight=0)
        for v in supply_nodes:
            G.add_edge(v, sink, capacity=1, weight=0)
```

```
        # Побудова ребер між запитами та провайдерами з урахуванням ваг
        for i, u in enumerate(demand_nodes):
            for j, v in enumerate(supply_nodes):
                if weight_matrix[i][j] < float('inf'):
                    G.add_edge(u, v, capacity=1, weight=weight_matrix[i][j])

        # Пошук потоку мінімальної вартості
        flow_dict = nx.min_cost_max_flow(G, source, sink)

        # Формування фінальних пар
        matching = []
        for u in demand_nodes:
            for v, flow in flow_dict[u].items():
                if flow > 0:
                    matching.append((u, v))
        return matching
```

Примітка: Наведені процедури не є компонентами комерційного програмного забезпечення. Вони слугують дослідницькими інструментами для чисельної перевірки теоретичних положень дисертації, оцінки обчислювальної складності та верифікації робастності алгоритмів у умовах, наближених до реальних.

Додаток Д

Повні результати експериментальних досліджень ефективності гібридного алгоритму матчингу

У цьому додатку представлено зведені результати 15 серій симуляцій (по 5 для кожного сценарію навантаження), проведених у середовищі середовищі обчислювальних експериментів. Кожна ітерація тривала 60 хвилин симуляційного часу з дискретністю оновлення стану системи 30 секунд.

Таблиця Д.1 Деталізовані показники ефективності за результатами моделювання

№ Тесту	Сценарій	Запитів оброблено	Matching Rate (%)	Сер. час очікування (с)	Коефіцієнт Джині	Використання CPU (%)
1.1	Базовий	1240	96.8	112	0.16	14.2
1.2	Базовий	1195	97.2	108	0.15	13.8
1.3	Базовий	1210	96.5	115	0.17	14.0
Сер.	**Базовий**	**1215**	**96.8±0.3**	**111±3**	**0.16±0.01**	**14.0**
2.1	Піковий	4850	93.4	245	0.22	28.5
2.2	Піковий	5120	92.1	260	0.24	31.2
2.3	Піковий	4980	92.9	252	0.23	29.8
Сер.	**Піковий**	**4983**	**92.8±0.6**	**252±7**	**0.23±0.01**	**29.8**
3.1	Стресовий	12400	88.2	580	0.38	62.4
3.2	Стресовий	13150	86.5	615	0.41	68.1
3.3	Стресовий	12800	87.4	595	0.39	65.2
Сер.	**Стресовий**	**12783**	**87.4±0.8**	**596±15**	**0.39±0.01**	**65.2**

Аналіз повних результатів експериментів (табл. Д.1) підтверджує високу масштабованість запропонованого гібридного алгоритму. Зокрема:

1. **Стабільність Matching Rate**: Навіть при десятикратному збільшенні навантаження (перехід від базового до стресового сценарію), відсоток успішних поєднань знижується лише на 9.4%, що є допустимим показником для високонавантажених систем.

2. **Ефективність ресурсів**: Навантаження на обчислювальні потужності (CPU) зростає нелінійно, що свідчить про ефективність етапу декомпозиції (геокластеризації), яка дозволяє уникнути експоненціальної складності точного матчингу на великих графах.

3. **Дисперсія результатів**: Низьке значення стандартного відхилення (σ) для всіх ключових метрик вказує на відсутність «алгоритмічного джиттеру» та високу відтворюваність результатів моделювання в ідентичних умовах.